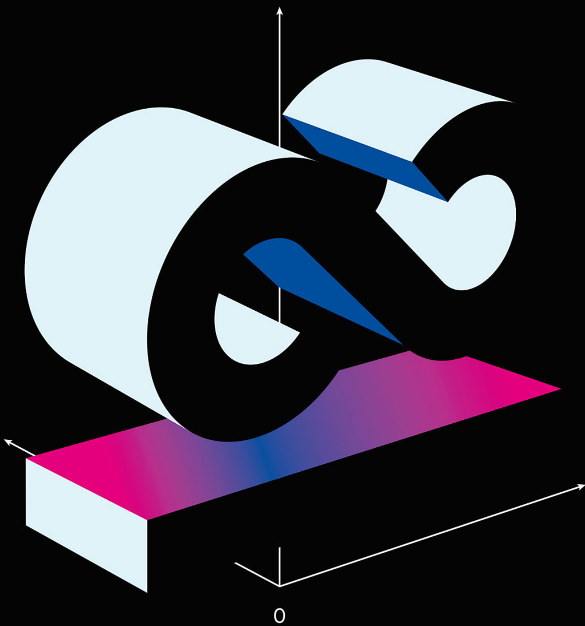
Иэн Стюарт



УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

История математики
от первых чисел
до теории хаоса

Иэн Стюарт

Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=40188784
Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса / Иэн Стюарт: Манн, Иванов и Фербер; Москва; 2019
ISBN 978-5-00117-455-4

Аннотация

Профессор Иэн Стюарт в увлекательной манере и с юмором рассказывает о том, как развивалась математика – с древнейших времен и до наших дней. Он рассматривает наиболее значимые темы и события, обращая особое внимание на их прикладной характер.

Вы познакомитесь с виднейшими математиками своих эпох, а также узнаете, как то или иное математическое открытие повлияло на нас и нашу историю.

Эта книга для математиков и всех, кто интересуется историей математики и науки вообще.

На русском языке публикуется впервые.

Содержание

Иэн Стюарт
Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса

Научный редактор Иван Ефишов
Издано с разрешения QUERCUS EDITIONS LIMITED

* * *

Предисловие

> **Математика не появилась** сразу в готовом виде. Она возникала постепенно, усилиями тысяч людей из разных культур, говоривших на многих языках. Ее постулаты, актуальные и по сей день, насчитывают более 4000 лет.

Многие человеческие открытия оказались недолговечными. Так, инженерное решение относительно дизайна колес было очень важным в Египте времен Нового царства, но сейчас мало кто назовет его прорывным. Математика же никогда не теряла своего значения. Едва успев оформиться, очередное ее открытие становилось необходимым для каждого и начинало жить своей жизнью. Важные математические идеи редко выходили из моды, хотя применять их можно было по-разному. Способы решения уравнений, открытые еще вавилонянами, используются до сих пор. Да, мы отказались от их символов, но отрицать историческую связь нельзя. Львиная доля основ математики, преподаваемых в школе, насчитывает не меньше 200 лет. Принятый в 1960-х гг. «современный» курс отсылает нас к XIX в. Однако, несмотря на внешнюю консервативность, математика шла вперед. В наши дни за неделю делается столько же математических открытий, сколько вавилонянам удавалось совершить за 2000 лет.

Развитие цивилизации всегда шло рука об руку с развитием математики. Без открытий в тригонометрии, сделанных древними греками, арабами и индусами, плавать по океанам во времена Великих географических открытий было бы гораздо опаснее. Торговые пути из Китая в Европу и из Индонезии в обе Америки проложены по невидимой математической нити. Трудно представить современное общество без математики. Практически всё, что нам сейчас кажется естественным, – от телевидения до мобильных телефонов, от гигантских пассажирских лайнеров до спутниковых навигационных систем в автомобилях, от расписаний поездов до медицинских обследований – опирается на ее выкладки и методы. Иногда им тысячи лет, порой всего несколько дней. Большинство даже не отдают себе отчета в их незримом присутствии в каждом из чудес современной технологии.

Это очень грустно, поскольку иные думают, будто в новых технологиях есть некое волшебство, и ожидают новых чудес каждый день. В то же время это естественно и позволяет нам легко и без сомнений применять чудеса на практике. Пользователю ни к чему загружать мозг лишней информацией о подноготной их работы. Если бы каждого потенциального пассажира проверяли на знание тригонометрии перед посадкой на самолет, вряд ли кто-то куда-то смог бы улететь.

Пожалуй, написать ясную историю математики – задача невыполнимая. Сегодня это настолько обширная, сложная и высокотехнологичная область, что даже эксперту едва ли будет под силу создать такой талмуд. Ближе всего к этой цели сумел подобраться Моррис Клайн в работе «Математическая мысль от древности до наших дней». Там всего-то 1200 страниц мелким шрифтом и вовсе ничего не сказано о последней сотне лет.

Моя книга гораздо короче, посему мне не раз приходилось делать выбор, особенно в отношении истории математики XX и XXI вв. Я отлично помню о темах, которые опустил. Здесь нет алгебраической геометрии, теории гомологий, метода конечных элементов или вейвлетов. На самом деле список пропущенных тем намного длиннее оглавления. Прежде всего я думал о том, какие базовые знания хотели бы получить читатели и какие из новейших идей более всего нуждаются в доходчивом объяснении.

Истории в книге размещены не в хронологическом порядке, а объединены по темам. В противном случае пришлось бы постоянно перескакивать с одного на другое, и в итоге потерялась бы нить повествования. Такая книга была бы нечитабельна, хотя и приближена к реальности. Поэтому в каждой главе я сначала делаю экскурс в историю, а затем двигаюсь по основным вехам развития вопроса. В первых главах я глубже всего ухожу в прошлое, а ближе к концу книги больше внимания уделяю современности.

Главной целью для меня было передать дух современной математической науки – примерно за последние 100 лет. Я старался выбирать темы, чаще всего оказывающиеся на слуху, и соотносить их с историческим контекстом. Отсутствие какой-то темы не значит, что я считаю ее неважной. Однако, по-моему, нецелесообразно в популярном издании тратить несколько страниц на историю Эндрю Уайлса, доказавшего Великую теорему Ферма (да многие читатели знают ее и без меня), или, скажем, на некоммутативную геометрию, одно вступление к которой займет несколько глав.

В общем, эта книга – история и в то же время не история. Она повествует о прошлом, но предназначена не для профессиональных историков, не содержит тонких определений, столь важных для них, и по большей части описывает прошлое с современной точки зрения. Я знаю, что последнее – непростительный грех для историка. Ведь читатель может решить, будто древние каким-то чудом научились мыслить по-современному. Однако я считаю одновременно оправданным и необходимым начинать с того, что нам известно, и двигаться к источнику идеи. Ведь греки изучали эллипсы вовсе не для того, чтобы Кеплер когда-нибудь создал теорию о планетарных орбитах, как и сам Кеплер сформулировал свои три закона движения небесных тел не для того, чтобы Ньютон переработал их в теорию всемирного тяготения. Однако история законов Ньютона уходит корнями в греческие исследования эллипсов и кеплеровский анализ данных астрономических наблюдений.

Сквозная тема этой книги – прикладной характер математики. Здесь у меня получился весьма эклектичный набор приложений как из прошлого, так и из настоящего. Повторюсь: если какая-то тема пропущена, это вовсе не значит, что я считаю ее несущественной.

Математика имеет длинную и славную, хоть и изрядно подзабытую историю. Не стоит недооценивать ее влияние на развитие нашей культуры. Если эта книга познакомит вас хотя бы с частью этой истории, значит, я добился своей цели.

Глава 1. Символы, единицы счета и глиняные таблички

Рождение чисел

Математика начинается с чисел, и числа остаются ее основой, хотя сама наука давно ушла от простых операций с ними. Выстраивая на основе чисел всё более отвлеченные и сложные концепции, она развилась в обширную и разнообразную область мысли, выходящую далеко за рамки школьной программы. Современная математика больше занимается исследованием формы, структуры и составляющих нашего мира, нежели числами как таковыми. Ее методы стали очень отвлеченными и часто абстрактными. Она задает направление в науке, промышленности, бизнесе и даже искусстве. Математика универсальна и вездесуща.

Всё начинается с чисел

За тысячелетия математики – представители разных культур – успели создать на основе чисел множество надстроек: геометрию, исчисление, динамику, теорию вероятностей, топологию, теорию хаоса, сложности и т. д. Журнал Mathematical Reviews, где приводятся ссылки на все новые материалы, выделяет в ней более 100 основных областей, содержащих не одну тысячу более узких. По всему миру насчитывается свыше 50 тыс. математиков-исследователей, и каждый год они публикуют более миллиона страниц научных текстов. Всё это новые открытия, а не вариации на тему уже существующих.

Математики часто пользуются логикой для создания еще более фундаментальной концепции, чем числа, – это математическая логика и теория множеств. Однако и здесь отправной точкой остается идея числа.

Числа кажутся простыми и понятными, но их внешняя простота обманчива. Операции с ними порой чрезвычайно сложны, и верный результат требует немалого труда. Но и тут намного легче оперировать числами, чем физическими объектами, которые они описывают. Да, они подразумевают предметы, но не являются ими: вы можете подержать в руках две чашки, но не число 2. Числа выражаются символами, но разные культуры используют разные знаки для одних и тех же чисел. Числа – абстракция, и всё же они составляют основу нашего общества: без них оно не сможет выполнять свои функции. Это один из видов умственных построений, но мы чувствуем, что они не утратят своего значения даже в случае гибели человечества из-за глобальной катастрофы, когда не останется разума, способного их воспринимать.

Запись чисел

История математики начинается с изобретения выражающих числа письменных символов. Привычный нам набор цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которого можно представить любое, даже самое огромное, число, изобретен относительно недавно, всего около 1500 лет назад. А его расширение до десятичных знаков, значительно увеличившее степень точности, и вовсе насчитывает всего 450 лет. Пятьдесят лет назад появились первые компьютеры: они так глубоко внедрили математические расчеты в нашу жизнь, что мы и не замечаем их присутствия. А 20 лет назад началось победное шествие самых мощных и высокоскоростных вычислительных машин, заполонивших офисы и дома.

Без чисел невозможно существование привычной нам цивилизации. Они повсюду, как незримые слуги, неутомимо трудятся за кулисами: передают сообщения, следят за грамотностью напечатанного нами текста, составляют маршрут полета в отпуск, фиксируют покупки, обеспечивают эффективность и безопасность лечения. Есть и противоположная сторона медали: они делают возможным изобретение ядерного оружия, точно наводят на цель бомбы и ракеты. Далеко не всегда математика служит исключительно благим целям.

Как же удалось достичь такого расцвета этой невиданной области? Всё началось 10 тыс. лет назад на Ближнем Востоке с маленьких глиняных фигурок. Даже тогда счета содержали сведения о том, кто чем владел и в каком количестве, – хотя еще не было ни письма, ни знаков для чисел. Вместо знаков древние счетчики использовали маленькие глиняные фигурки. Одни имели форму сферы, другие – конуса, третьи – яйца. Были и цилиндры, и диски, и пирамиды. Археолог Дениз Шмандт-Бессера пришла к выводу, что фигурки представляли основные ценности того времени. Глиняные сферы обозначали меры зерна, цилиндры – животных, яйца – кувшины масла. Самые древние фигурки датируются 8000 г. до н. э., и их широко использовали в последующие 5000 лет.

Со временем фигурки становились всё более изысканными и специализированными. Были найдены конусы в виде ломтей хлеба и даже ромбовидные символы пива. Шмандт-Бессера считает, что эти фигурки – не просто приспособления для счета. Это первый, самый важный шаг к изобретению цифровых символов, арифметики и математики. Однако из-за своей необычности он кажется случайным.

Всё произошло потому, что фигурки использовались для записи: возможно, собранных налогов, или финансовых операций, или как законное доказательство права на собственность. Их достоинством была простота, с которой счетчики могли поделить их на группы, чтобы определить, сколько животных или зерна имеет или имел человек. Но был и недостаток: фигурки легко подделывались. Для предотвращения махинаций с ними счетчики стали заворачивать их в своего рода глиняные конверты – аналог печати. Чтобы определить, сколько каких фигурок в каждом конверте, его было достаточно разбить. Восстановить его не составляло особого труда.

Всё же необходимость постоянно раскалывать и восстанавливать конверты казалась чиновникам древней Месопотамии слишком утомительной, и они придумали кое-что получше. Они стали метить конверты особыми символами, обозначающими их содержимое. Если там было семь сфер, то и на конверте они рисовали семь кружков.

Наступил момент, когда до месопотамских чиновников дошло: если есть символы, то можно обойтись и без фигурок; чтобы знать, что внутри конверта, нет нужды его разбивать. В результате этого очевидного, но судьбоносного открытия появился набор письменных символов для чисел, разной формы для разных классов предметов. Все прочие, включая и те, которыми пользуемся мы, – производные от этих бюрократических приспособлений древности. Именно замену фигурок символами можно считать изобретением письменности.

Единицы счета

Первые знаки нельзя считать ранними примерами записи чисел. Это просто царапины, метки, выражающие числа в виде серии насечек, например ||||||||||||| для обозначения 13. Самая древняя из известных на сегодняшний день таких надписей – 29 насечек на бедренной кости бабуина, сделанная 37 тыс. лет назад. Эту кость нашли в пещере в горах Лебомбо, на границе между Свазилендом и ЮАР. Место называется Пограничной пещерой, а артефакт – костью Лебомбо.

В отсутствие машины времени нельзя с уверенностью утверждать, что означал каждый символ, но можно делать обоснованные предположения. В лунном месяце 28 дней, значит, насечки, должно быть, связаны с фазами Луны.

В Европе обнаружены похожие артефакты. Пятьдесят семь насечек на волчьей кости из бывшей Чехословакии разбиты на 11 групп по пять с двумя лишними; этой находке 30 тыс. лет. Дважды по 28 будет 56: это может быть обозначение для двухмесячного лунного отрезка времени. И снова у нас нет способа проверить это предположение. Но насечки явно что-то значат, их сделали не просто так.

Еще одна древняя математическая запись, на кости Ишанго из Заира, была сделана 25 тыс. лет назад (прежняя оценка в 6000–9000 лет пересмотрена учеными в 1995 г.). На первый взгляд эти царапины по краям кости кажутся случайными, но здесь может быть скрытый смысл. Один ряд состоит из простых чисел от 10 до 20: это 11, 13, 17 и 19, и в сумме они дают 60. В другом ряду мы видим 9, 11, 19 и 21, что также в сумме равно 60. Третий ряд представляет способ умножения двух чисел: одно из них несколько раз удваивают, а другое делят пополам. Но не исключено, что всё это лишь совпадение или что кость Ишанго – древний лунный календарь.

Первые цифры

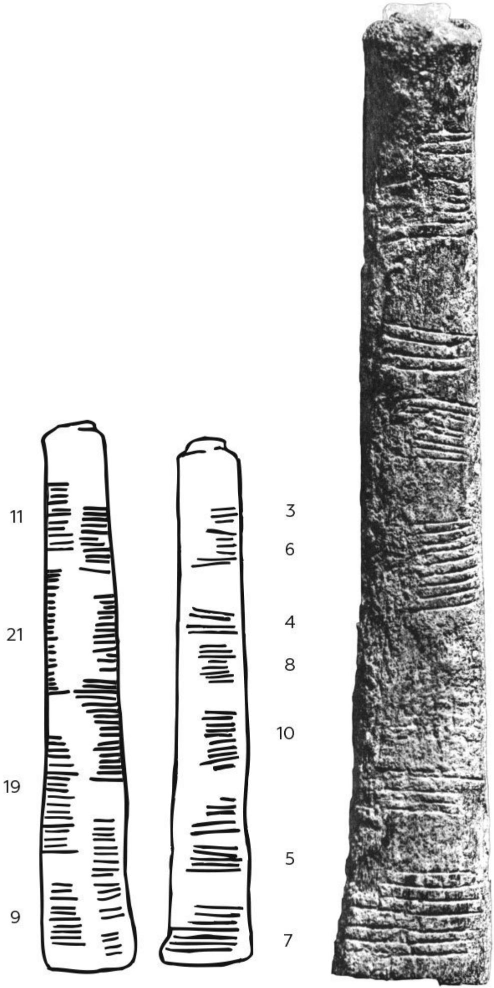
Исторический путь от счетных фигурок к современным цифрам долог и извилист. Тысячелетиями народ Месопотамии развивал сельское хозяйство, и на смену кочевому образу жизни пришел оседлый, породив ряд городов-государств: Вавилон, Эриду, Лагаш, Шумер, Ур. Ранние символы на глиняных табличках усложнились до пиктограмм, передающих значения слов в упрощенном виде. Они упрощались всё больше и больше, и в итоге осталось ограниченное число клиновидных отметин, выдавленных на глине сухой палочкой с острым плоским концом. Меняя угол давления, можно было получать отметки разной формы. К 3000 г. до н. э. шумеры создали сложную письменность, названную клиновидной.

История этого периода чрезвычайно сложна; доминировали то одни города, то другие. В какой-то момент высшего расцвета достиг Вавилон: из месопотамских песков ученые выкопали более миллиона глиняных табличек. Несколько сот из них, посвященных математике и астрономии, демонстрируют удивительно глубокие познания древних в этих областях. В частности, вавилоняне были просвещенными астрономами и сумели создать сложнейшую систему математических символов, с помощью которых могли передавать точные астрономические данные.

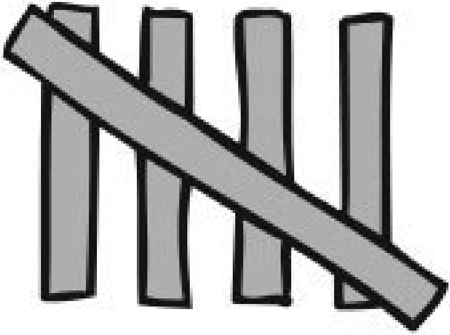
Числовые символы вавилонян ушли далеко от простых насечек и считаются самыми древними в своем роде. Использовались два разных вида клинышков: тонкий вертикальный обозначал цифру 1, а толстый горизонтальный – 10. Эти знаки, собранные в группы, представляли числа от 2 до 9 (для вертикальных клиньев) и десятки от 20 до 50 (для горизонтальных). Но ряд кончался на 59, после чего тонкий вертикальный клин уже обозначал число 60.

Таким образом, вавилонская система счисления основана на 60, т. е. является шестидесятиричной. В ней каждый символ обозначает либо какое-то число, либо его же, умноженное на 60, либо умноженное на 60 и еще раз на 60 – в зависимости от его положения.

Таков же принцип счисления в нашей десятеричной системе, где значение каждого символа умножается на 10, или 100, или 1000 в зависимости от его положения. Например, в числе 777 первая 7 значит «семь сотен», вторая – «семь десятков», а третья – «семь единиц». У вавилонян серия из трех  (символа для 7) будет иметь иное значение, хоть и основанное на том же принципе. Первый символ будет значить 7 × 60 × 60, т. е. 25 200; второй 7 × 60 = 420, третий – 7. Значит, группа из трех символов означает 25 200 + 420 + 7, или 25 627. Артефакты с вавилонской системой счисления, основанной на 60, обнаруживаются до сих пор. И 60 секунд в минуте, и 60 минут в часе, и 360 градусов в окружности уходят корнями в Древний Вавилон.



Кость Ишанго: насечки и представленные ими числа



Простые единицы счета удобны тем, что их можно наносить по одной в течение долгого времени, не изменяя и не удаляя предыдущие. Их используют и сейчас, часто в группах по пять: пятая палочка по диагонали пересекает первые четыре

Древние единицы счета можно найти в элементах современных символов. Наши цифры 1, 2 и 3 явно произошли от насечек: одна горизонтальная, две горизонтальные, связанные косой чертой, и три горизонтальные, связанные косыми чертами

Из-за сложности передачи клинописи ученые изображают вавилонские числа «гибридом» из наших десятеричных знаков и вавилонских шестидесятиричных. Так, тройка клинописных символов для 7 будет выглядеть как 7,7,7. А 23, 11, 14 обозначает вавилонские символы для 23, 11 и 14, написанные по порядку, с числовым значением $(23 \times 60 \times 60) + (11 \times 60) + 14$, или 83 474 в десятичной системе счисления.

Символы для малых чисел

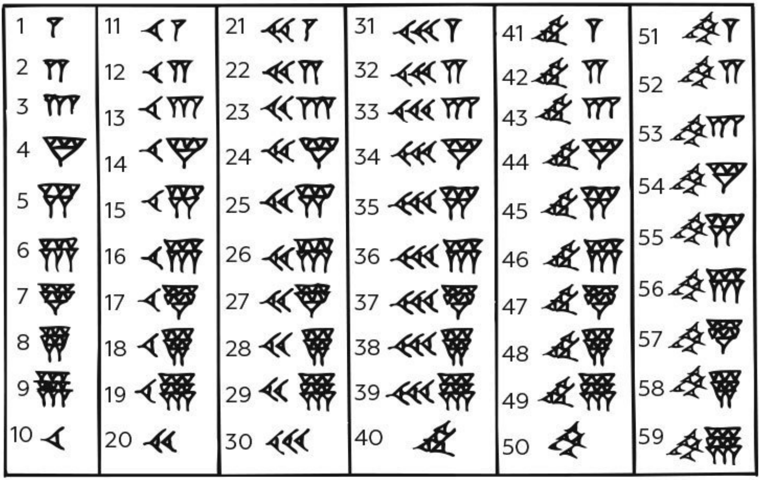
Мы используем десять знаков не только для обозначения сколь угодно больших чисел: эти же символы отлично справляются и с числами сколь угодно малыми. С этой целью мы используем десятичный разделитель, обозначаемый запятой. Цифры слева от нее обозначают целые числа, справа – их доли, дроби. Дробная часть представляет десятые, сотые доли и т. д. Число 25,47 значит две десятки плюс пять единиц плюс четыре десятых плюс семь сотых.

Вавилоняне знали этот фокус и с пользой применяли его в своих астрономических записях. Ученые использовали в качестве вавилонского эквивалента десятичного разделителя знак «точка с запятой» (;), но это шестидесятеричная «запятая», и числа справа от нее кратны $^1/_{60}$, $(^1/_{60} \times {}^1/_{60}) = {}^1/_{3600}$ и т. д. Например, последовательность чисел 12,59;57,17 составит

$$12 \times 60 + 59 + {}^{57}/_{60} + {}^{17}/_{3600},$$

что в сумме приблизительно равно 779,955.

На данный момент известно около 2000 вавилонских астрономических табличек. Большинство из них относительно простые и содержат перечень предсказываемых затмений, других регулярных астрономических событий и краткие данные по ним. Около 300 табличек заслуживают большего интереса и восхищения: на них отмечены пути Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна.



Вавилонские символы для чисел от 1 до 59

Какой бы увлекательной ни была история Вавилона, нашу всемирную историю она задевает лишь по касательной, в основном в части чистой математики. Однако, судя по всему, именно приложение к астрономии стало важным толчком к более активному развитию этой науки. Вот почему полезно отметить поразительную точность, с которой вавилоняне описывали астрономические события. Например, они определили период обращения Марса (отрезок времени между двумя его появлениями в одной и той же точке на небосклоне) в 12,59;57,17 дня в своем исчислении, т. е. примерно 779,955 нашего дня, как упоминалось выше. Современные данные – 779,936 дня.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖИЛИ ИМ

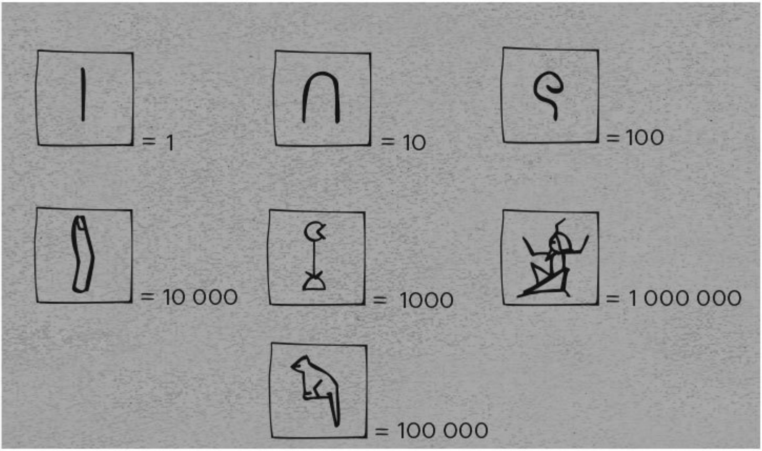
Вавилонская табличка Юпитера. Вавилоняне использовали свою систему счисления для торговли, счета и более отвлеченных и сложных целей, например астрономии. Здесь способность их системы с высокой точностью представлять дроби оказалась особенно важной. Многие сотни табличек хранят данные о движении планет. Среди них есть одна, относительно плохо сохранившаяся, с ежедневными данными о движении Юпитера примерно за 400 лет. Она была создана в самом Вавилоне около 163 г. до н. э. Эта типичная запись содержит числа 126 8 16;6,46,58 – 0;0,45,18 – 0;0,11,42 + 0;0,0,10, что соответствует различным величинам, используемым для вычисления положения планеты в небе. Заметьте: числа с тремя шестидесятеричными знаками после запятой чуть точнее, чем их аналоги из пяти чисел в десятичной системе.

Древние египтяне

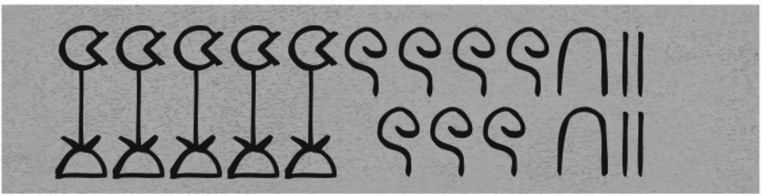
Наверное, самой великой из древних цивилизаций была египетская. Период ее расцвета на плодородных берегах Нила и его дельты приходится на 3150–31 гг. до н. э., с долгой додинастической историей, простирающейся до 6000 г. до н. э., и медленным упадком под властью Рима после 31 г. до н. э. Египтяне были великими строителями, со сложной высокоразвитой системой верований и церемоний, а также скрупулезными летописцами. Но их математические достижения бледнеют в сравнении с открытиями вавилонян.

Древнеегипетская система записи целых чисел проста и незамысловата. У них были символы для 1, 10, 100, 1000 и т. д. Повторяя их до девяти раз, они затем складывали их, чтобы получить значение числа.

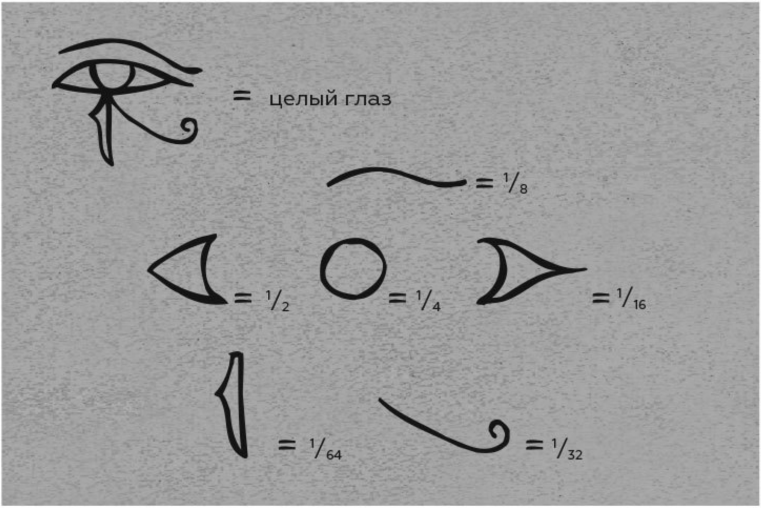
Например, чтобы изобразить число 5724, египтяне должны были нарисовать рядом пять символов для 1000, семь символов для 100, два символа для 10 и четыре для 1.



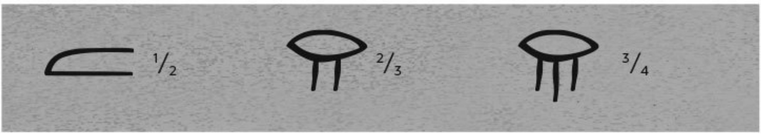
Египетские числовые символы



Число 5724, записанное египетскими иероглифами

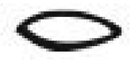
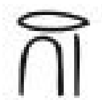


Специальные обозначения некоторых дробей (части «глаза Гора»)



Специальные символы для некоторых дробей

Дроби для египтян были лишней головной болью. В разные периоды они использовали для дробей разные наборы знаков. В Старом царстве (2700–2200 гг. до н. э.) применялись специальные обозначения для наших дробей: $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{16}$, $^{1}/_{32}$ и $^{1}/_{64}$, которые получены повторяющимся делением пополам. Эти символы включали части «глаза Гора», или иероглифа Уаджет.

Самую известную древнеегипетскую систему записи дробей относят к Среднему царству (2200–1700 гг. до н. э.). Она начинается с определения каждой дроби в виде $^{1}/_{n}$, где n – положительное целое число. Для обозначения n символ  (иероглиф для буквы R) ставили сверху стандартных египетских символов чисел. Значит, например, $^{1}/_{11}$ будет написана так: . Другие дроби соответственно отображались добавлением необходимого числа таких «единичных дробей». Например, $^{5}/_{6} = ^{1}/_{2} + ^{1}/_{3}$.

Интересно, что при этом египтяне не писали $^{2}/_{5}$ как $^{1}/_{5} + ^{1}/_{5}$. Судя по всему, здесь работало правило: использовать *разные* единичные дроби. Существовали также разные обозначения для некоторых простых дробей, например $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$ и $^{3}/_{4}$.

Египетские обозначения дробей очень неуклюжие и плохо приспособлены для вычислений. Они были пригодны для официальных отчетов, но остались вне поля зрения последующих культур.

Числа и народы

Независимо от вашего отношения к арифметике вы не посмеете отрицать весомое влияние чисел на нашу цивилизацию. Эволюция культуры в целом и математики в частности шли рука об руку на протяжении последних четырех тысячелетий. Сейчас уже практически невозможно отделить причину от следствия: я не рискну уверенно заявить, что именно математические открытия ускоряли глобальные изменения в культуре или, напротив, культурные запросы определяли направление математической мысли. Скорее, оба утверждения содержат зерно истины, ведь математика и культура неразделимы.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖАТ НАМ

Многие современные автомобили оборудованы системой спутниковой навигации. Само устройство относительно дешево. Небольшой прибор, установленный в машине, в любой момент точно определит ваше местоположение и покажет на карте – часто с броской наглядной расцветкой и в трехмерной проекции – ближайшие окрестности и дороги. Голосовое управление объяснит, как лучше всего добраться до нужного места. Звучит как нечто из научной фантастики. Необходимой частью этой системы, не помещенной в вашу коробочку, является GPS (Global Positioning System – Глобальная система определения координат), состоящая из 32 спутников на околоземной орбите. Они постоянно подают сигналы, и с помощью этих знаков навигатор определит положение автомобиля с точностью до метра.

Математика задействована во многих аспектах работы GPS-сети, но здесь мы упомянем один: как используются сигналы спутника для определения локации машины.

Радиосигналы движутся со скоростью света, т. е. примерно 300 тыс. км/с. Компьютер в салоне машины – чип в купленной вами коробочке – может вычислить расстояние от вашей машины до спутника, измерив время, за которое сигнал последнего достигает машины. В среднем это около 0,1 с, но для современной техники не составит труда определить это с большей точностью. Однако нужно так составить сигнал, чтобы он сам содержал информацию о времени.

По сути, спутник и приемник в автомобиле играют одну и ту же мелодию, и мы сравниваем время ее звучания. «Ноты», пришедшие со спутника, будут с небольшой задержкой проигрываться в машине. По аналогии эта мелодия может звучать примерно так:

МАШИНА: …На этот горный склон крутой / Ступала ль ангела нога?

СПУТНИК: На этот горный склон крутой / Ступала ль…

> Здесь «мелодия» спутника проигрывается с задержкой примерно на три слова в самой машине. И спутник, и приемник должны исполнять одну «песню», и исполняемые «ноты» должны быть легко определяемы, чтобы можно было точно измерить разницу во времени.
>
> Конечно, в спутниковой навигационной системе не звучат песни. Сигнал состоит из коротких импульсов, чья продолжительность определяется псевдослучайным кодом. Это последовательность цифр, случайная на первый взгляд, на самом деле подчиняется определенным математическим правилам. Они известны и спутнику, и приемнику, которые могут генерировать одинаковую последовательность импульсов.

Однако они имеют одно существенное различие. Многие культурные скачки очевидны. Новые веяния в архитектуре, новые виды транспорта, даже новые формы организации правительственной бюрократии так или иначе заметны всем.

Математика обычно скрыта за кулисами. Когда вавилоняне использовали свои астрономические наблюдения для предсказания затмений Солнца, публика впадала в экстаз от точности, с которой жрецы предвидели столь ужасающее событие. Но даже высшее жречество не знало почти ничего о применяемых методах. Они были в курсе, как прочесть таблички с нужными им данными, но для них главным было то, как воспользоваться знанием. Как именно удалось его достичь, оставалось тайной за семью печатями, доступной только специалистам.

Некоторые жрецы получали неплохое математическое образование – как и все культурные переписчики. Они обучались почти так же, как и писцы, особенно в первые годы, но им не требовалось доскональное знание математики, чтобы *пользоваться* преимуществами новых открытий в этой области. Так сложилось исторически, и так всё будет и впредь. Математикам редко вручают награды за кардинальные перемены в нашем мире. Сколько раз вы видели чудеса современного мира, созданные компьютерами, без малейшего намека на то, что они эффективны лишь в том случае, если запрограммированы на использование сложнейших алгоритмов для решения проблем, и что основой почти любого алгоритма служит математика?

Важный раздел математики, лежащий на поверхности, – арифметика. Но с появлением карманных калькуляторов, способных рассчитывать стоимость покупок или величину налогов, ее оттеснили еще дальше. По крайней мере, многие из нас всё еще отдают себе отчет в том, что арифметика есть *где-то там*. Мы живем в полной зависимости от чисел, будь то расчеты доходов и налогов, общение с людьми в другом полушарии, исследование поверхности Марса или испытание нового лекарственного средства. Всё это уходит корнями в Древний Вавилон, к писцам и учителям, изобретавшим эффективные способы изображать числа и оперировать ими. Они использовали свои познания в арифметике в двух направлениях: в приземленной деятельности простых людей (например, измерение земельных наделов или подсчет налогов) и в возвышенной работе человеческого разума (предсказание солнечных затмений или движения планет в небесной сфере).

Сегодня мы поступаем так же. Мы используем простейшие вычисления, незначительные даже для арифметики, для сотен мелких дел: добавления в нужной концентрации средства от паразитов в пруд с золотыми рыбками, покупки нужного числа рулонов новых обоев для спальни, составления маршрута таким образом, чтобы потратить меньше бензина и сэкономить. А наша культура использует высшую математику в науке, технологиях и всё больше в торговле. Изобретение цифр и арифметического счета наряду с обретением речи и письма занимает законное место среди достижений, которые отличают нас от обучаемых обезьян.

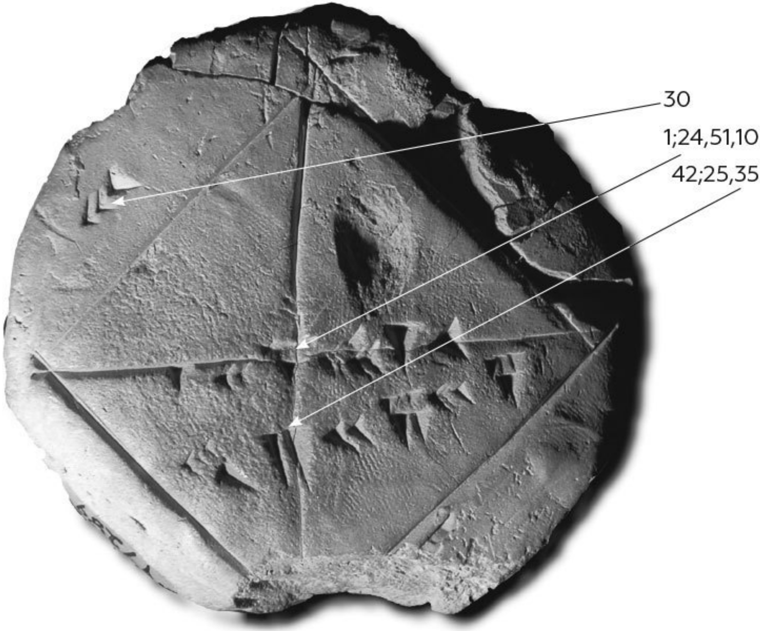
Глава 2. Логика формы

Первые шаги в геометрии

В математике существует два основных типа рассуждений: символьный и наглядный. Символьная выкладка ведет историю от числовой записи, и мы вкратце ознакомились с тем, как это привело к изобретению алгебры, где символы могут обозначать скорее обобщенные числа («неизвестные»), чем какие-то конкретные («7»). Начиная со Средних веков и до наших дней математика всё больше опирается на символы: если хотите убедиться, достаточно взглянуть на любой современный математический текст.

Начала геометрии

Наравне с символами математики используют схемы и диаграммы, открывающие неограниченные возможности для визуализации научных выкладок. Картинки менее формальны, чем символы, и чаще всего именно это ставит под вопрос целесообразность их использования. Широко распространено убеждение, будто картинка дает менее строгую и логичную выкладку, чем подсчеты с помощью символов. Это верно: изображение всегда оставляет больший простор для толкований. Более того, картинка может содержать скрытые намеки. Мы не можем изобразить некий «обобщенный» треугольник: любой треугольник будет иметь свою форму и размеры, которые порой не соответствуют случайно выбранной фигуре. Но поскольку визуальная интуиция остается очень мощной особенностью нашего мозга, наглядные образы играют важную роль в математике. Фактически они определяют вторую по важности идею предмета после чисел, т. е. его форму.



Табличка YBC 7289 с клинописными числами

Увлечение математиков формами имеет долгую историю. Даже на вавилонских табличках мы находим диаграммы. Например, на табличке с регистрационным номером YBC 7289 есть квадрат с двумя диагоналями. Его стороны отмечены клинописными символами, означающими 30. Выше на одной из диагоналей стоит 1;24,51,10, а под нею 42;25,35, которое равно произведению первого числа на 30, а также длине этой диагонали. Таким образом, 1;24,51,10 – длина диагонали меньшего квадрата со стороной, равной единице. Теорема Пифагора утверждает, что она равна корню квадратному из 2, и мы обозначаем его как $\sqrt{2}$. 1;24,51,10 приближает $\sqrt{2}$ с точностью до шести цифр после запятой.

Первая систематизация с использованием схем, ограниченным применением символов и изрядной долей логики встречается в описании геометрии Евклидом. Он следовал традиции, восходящей к культу Пифагора, чей расцвет пришелся на 500 г. до н. э. Однако Евклид настаивал, что любое положение математики должно иметь логическое доказательство для признания его достоверности. В записях Евклида есть важное нововведение – использование в доказательствах рисунков и логических построений. И многие века слово «геометрия» тесно ассоциировалось с этим подходом.

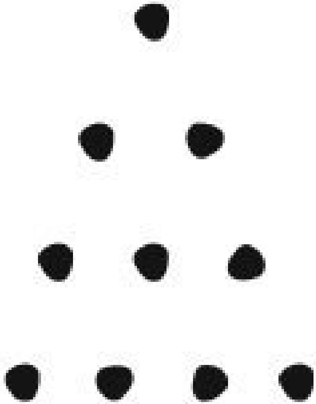
В этой главе мы проследим историю геометрии от Пифагора через Евклида и его предшественника Евдокса до позднего периода греческого классицизма, вплоть до его «наследников» Архимеда и Аполлония. Эти ранние геометры проложили путь для всех дальнейших работ с наглядными суждениями в математике. Также они установили стандарты логического доказательства, сохранившиеся неизменными на протяжении тысячелетий.

Пифагор

Сегодня мы принимаем как должное то, что математика дает нам ключи к законам существования природы. Первые систематизированные записи об этом пришли к нам от пифагорейцев – приверженцев мистического культа, датируемого промежутком между 600 и 400 гг. до н. э. Его основатель Пифагор родился около 569 г. до н. э. на Самосе. Место и дата его смерти покрыты мраком, но в 460 г. до н. э. основанный им культ подвергся нападкам и искоренению, а тайные места сборищ были уничтожены. В одном из них, доме Мило в Кротоне, более 50 захваченных пифагорейцев вырезали на месте. Многие из выживших сбежали в Фивы в Верхнем Египте. Не исключено, что одним из этих людей был сам Пифагор. Но даже если это всего лишь красивая выдумка, мы практически ничего не знаем о Пифагоре наверняка. Имя его у всех на слуху, главным образом из-за знаменитой теоремы о прямоугольном треугольнике, но мы даже не уверены, доказал ли ее он сам.

Зато нам известно гораздо больше о философии и убеждениях пифагорейцев. Они понимали, что математика – не реальность, а абстрактная концепция. В то же время они верили, что эта абстракция как-то воплощается в «идеальной» концепции, существуя в некоем странном воображаемом мире. То есть, например, нарисованный палочкой на песке круг – безуспешная попытка круга стать идеальным, совершенно ровным и невообразимо тонким.

Самым важным аспектом философии пифагорейцев была идея, что в основе всего лежат числа. Они выражали свою веру с помощью мифологических символов и подкрепляли ее практическими наблюдениями. В мистическом плане они считали, что число 1 – первичный источник всего во Вселенной. Числа 2 и 3 символизируют женское и мужское начала. Число 4 – символ гармонии, а также четырех стихий (земля, воздух, огонь и вода), из которых сотворено всё сущее. Пифагорейцы придавали особое мистическое значение числу 10, потому что 10 = 1 + 2 + 3 + 4 и объединяет в себе первичную единицу, женское начало, мужское начало и четыре стихии. Более того, эти числа образуют треугольник, а вся геометрия Древней Греции построена на свойствах треугольников.



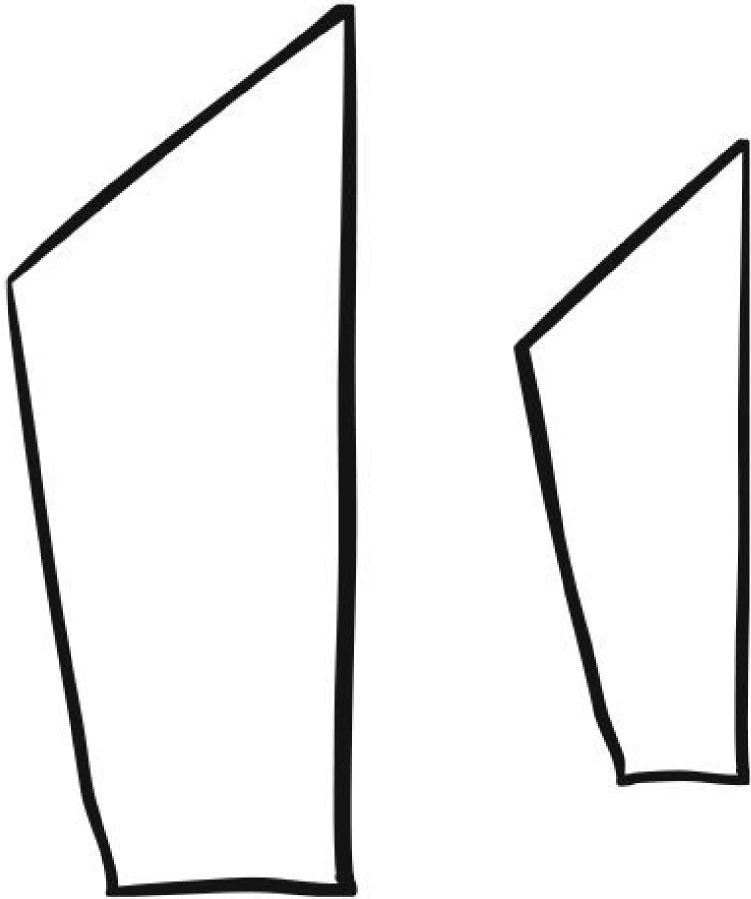
Число 10 в виде треугольника

ГАРМОНИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Главным доказательством своей концепции Вселенной чисел пифагорейцы считали музыку: они обнаружили ряд поразительных связей между гармонией звуков и простыми дробями. В результате несложных экспериментов они открыли, что если натянутая струна издает определенный звук, то вместе со струной вдвое меньшей длины она будет издавать гармоничные созвучия, которые сейчас называют октавой. Струна длиной в $^2/_3$ и $^1/_3$ от первой также создают гармоничные звуки.

> Сегодня эти числовые аспекты музыки относят к физике колебания струн, которые служат основой для теории волн. Количество волн, помещающихся в заданной длине струны, является целым числом, и эти числа образуют простые соотношения. Если они не укладываются в простую пропорцию, соседние звуки накладываются друг на друга, создавая несогласованные «биения», неприятные для слуха. На самом деле всё намного сложнее и включает особенности восприятия нашего мозга, но в любом случае мы видим физическое обоснование открытия пифагорейцев.

Пифагорейцы говорили о существовании девяти небесных тел: Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн плюс центральный огонь, отличный от Солнца. В их космологии числу 10 придавалось столь серьезное сакральное значение, что они включили в эту систему Антихтон (Антиземля, Противоземля) – загадочную планету, скрытую от нас Солнцем.



Это две подобные формы

Как мы уже знаем, целые числа 1, 2, 3 и т. д. естественно приводят нас ко второму виду чисел – дробям. Математики называют их рациональными числами. Это дроби вида $^{a}/_{b}$, где a и b – целые числа (также b не равно 0, иначе вся дробь не имеет смысла). Дроби могут делить целые числа на сколь угодно малые части, а значит, длину стороны геометрической фигуры можно аппроксимировать настолько близко, насколько мы пожелаем, с помощью рациональных чисел. Кажется вполне естественным, что можно в точности разделить число так, чтобы все длины были рациональными.

Если бы это было возможно, геометрия стала бы намного проще: два любых отрезка можно было бы представить целыми числами, кратными длине небольшого отрезка, и так получить их общую длину, сложив множество копий таких отрезков. Кому-то это может показаться неважным, но мы значительно упростили бы понимание теории длин, площадей и особенно подобия фигур (которые имеют одинаковую форму, но разный размер). С помощью схем, сформированных из бесконечного множества копий одной и той же базовой формы, можно доказать что угодно.

К несчастью, этой мечте не суждено было осуществиться. По легенде, один из пифагорейцев, Гиппас из Метапонта, обнаружил, что это утверждение ошибочно. В частности, он доказал, что диагональ единичного квадрата (квадрата со стороной, равной одной единице), иррациональна, не является дробью. Известно (хоть это и непроверенные данные, но отличная история), что он оплошал, озвучив этот факт, когда пифагорейцы пересекали на лодке Средиземное море. Его «товарищи по цеху» пришли в такое негодование, что вышвырнули его за борт, и он утонул. Но, скорее всего, дело ограничилось его отлучением от братства. Каким бы ни было наказание, оно явно говорит о том, что его открытие не привело пифагорейцев в восторг.

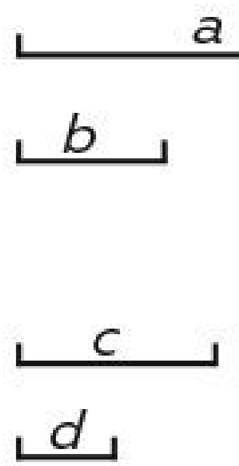
Современное толкование наблюдений Гиппаса состоит в том, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число. На взгляд пифагорейцев, этот факт был ударом в спину их беззаветной вере в то, что корни Вселенной уходят в числа – целые. Дроби – отношения целых чисел – еще кое-как вписывались в это мировоззрение, но для чисел, которые доказуемо не являлись дробями, здесь места не было. Вот и вышло, что утопленный или отлученный бедняга Гиппас стал первой жертвой иррациональности – или, скорее, религиозных убеждений.

Укрощение иррациональности

Но греки всё же нашли способ справиться с иррациональностью – благодаря тому, что любое иррациональное число можно аппроксимировать рациональным. Чем точнее приближение, тем сложнее рациональное число, и всегда остается некоторая погрешность. Делая ее всё меньше, мы получаем возможность изучать свойства иррациональных чисел, исследуя аналогичные свойства ближайших к ним рациональных. Проблема в том, чтобы поставить эту идею на те рельсы, которые были бы совместимы с подходом греков к геометрии и доказательствам. Это оказалось выполнимой, но сложной задачей.

Греческая теория иррациональных чисел была сформулирована Евдоксом примерно в 370 г. до н. э. Он стремился представить любую величину, рациональную или иррациональную, в виде соотношения двух отрезков – иными словами, *парными* отрезками. Таким образом, дробь $^2/_3$ можно представить как два отрезка, один длиной в две единицы и другой в три (соотношение 2:3). $\sqrt{2}$ можно представить парой, составленной диагональю единичного квадрата и его стороной (и это будет соотношение $\sqrt{2}:1$). Обратите внимание: здесь оба отрезка могут быть построены геометрически.

Здесь главный секрет – определить, когда эти два соотношения будут равны. Когда $a: b = c: d$? Греки не имели такой системы счисления, которая позволила бы им сделать это простым делением длины одного отрезка на длину другого, и вынуждены были сравнивать *a: b* с *c: d*. А Евдокс предложил громоздкий, но точный способ сравнения, укладывающийся в условности греческой геометрии. Идея была в том, чтобы сравнивать целочисленные произведения *ma* и *nc*. Этого можно было достичь, соединяя *m* копий *a* непрерывной цепью и точно так же *n* копий *b*, а затем использовать те же множители *m* и *n* для сравнения *mb* и *nd*. Евдокс рассуждал: если соотношения *a: b* и *c: d* не равны, мы можем подобрать *m* и *n* так, чтобы увеличить разницу до такой степени, что *ma* > *nc*, но *mb* < *nd*. Действительно, так мы можем установить равенство соотношений.



Равны ли соотношения a: b и c: d?

Такое определение требует специальных навыков, зато прекрасно вписывается в ограниченные возможности греческой геометрии. Так или иначе, оно работает; более того, оно позволило греческим геометрам взять теоремы, легко доказуемые с помощью рациональных отношений, чтобы расширить их действие до иррациональных.

Часто они использовали так называемый метод исчерпывания (или, иначе, истощения), в котором некоторые видят предка современного метода пределов и интегрального исчисления. Этим методом они доказали, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса. Доказательство основывалось на простом факте, открытом Евклидом: площади двух подобных *многоугольников* соотносятся в той же пропорции, что и квадраты их соответствующих сторон. Круг представлял проблему: он не был многоугольником. Тогда греки построили две последовательности многоугольников: одну помещавшуюся внутри круга, а вторую – снаружи. Каждый следующий многоугольник всё ближе подходит к кругу, и из метода исчерпывания, доведенного до совершенства Евдоксом, следует, что площади самых близких к кругу многоугольников стремятся к его площади и в итоге совпадут с ней.

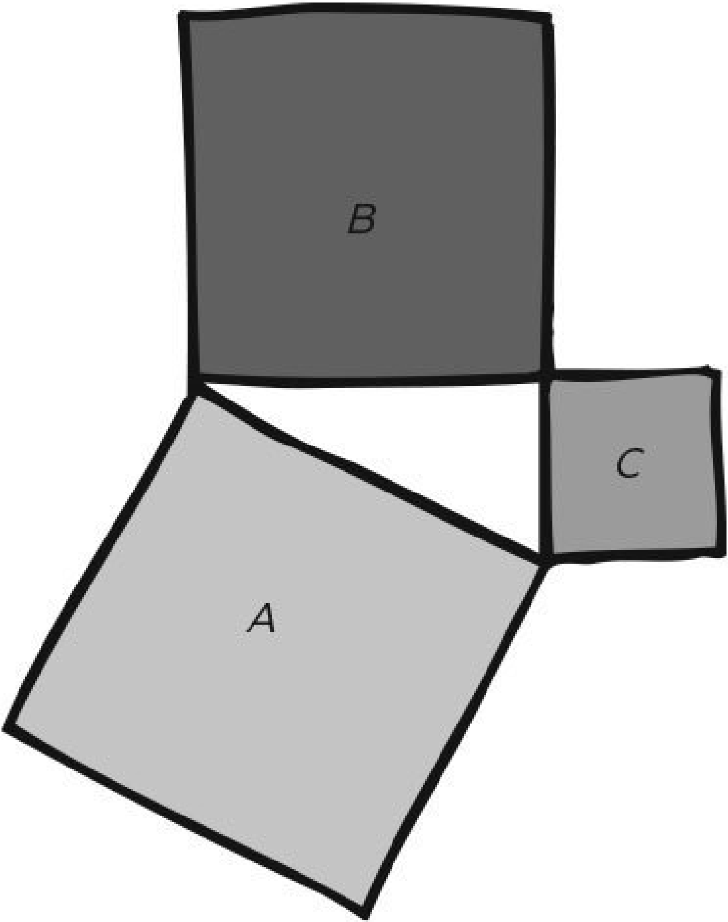
Евклид

Самым известным греческим геометром, хотя, возможно, и не самым талантливым математиком, считается Евклид Александрийский. Он внес огромный вклад в историю науки, собрав труды предшественников и сведя их воедино, и его «Начала» – шедевр всех времен и народов. Евклид создал не меньше десяти трудов по математике, из которых до нас дошло только пять, и те в поздних копиях, в виде фрагментов. До наших дней не дожил ни один подлинный документ из Древней Греции. Пять имеющихся текстов Евклида называются «Начала», «О делении», «Данные», «Явления» и «Оптика».

«Начала» считаются основным трудом Евклида, который окончательно утвердил разделение геометрии на двумерную (планиметрию) и трехмерную (стереометрию). «О делении» и «Данные» содержат разные дополнения и комментарии в части геометрии. «Явления» посвящены астрономии, сферической геометрии и исследованию геометрических фигур на поверхности сферы. «Оптика» также относится к этой области и может считаться первой попыткой исследования геометрии перспективы – способности человеческого глаза преобразовать трехмерное изображение в двумерную картинку.

Пожалуй, лучшим трудом Евклида можно считать исследование логики пространственных отношений. Если форма имеет определенные свойства, логично, что они определяют и другие ее характеристики. Например, если у треугольника равны все три стороны, т. е. он равносторонний, то должны быть равны и все три его угла. Такой вид утверждений, когда делается допущение, а потом приводится его логическое следствие, называется теоремой. Здесь это теорема о свойствах равностороннего треугольника. Менее интуитивно понятна, зато более известна теорема Пифагора.

«Начала» состоят из 13 книг, выстроенных в логической последовательности. В них обсуждаются геометрия плоскости (планиметрия) и некоторые аспекты геометрии пространства (стереометрии). Важный момент – доказательство существования пяти геометрически правильных многогранников: тетраэдра, гексаэдра (попросту куба), октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Основные фигуры планиметрии – линия и круг, часто встречающиеся в разных сочетаниях: например, треугольник – сочетание трех прямых линий. В стереометрии мы имеем дело с плоскостями, цилиндрами и сферами.



Теорема Пифагора: если треугольник прямоугольный, площадь большого квадрата *A* равна сумме площадей двух других, *B* и *C*

Для современных математиков представляет интерес не столько содержание трудов Евклида, сколько их логическая структура. В отличие от предшественников, он не просто принимает известную теорему как истину. Он ее доказывает.

Что значит доказать теорему? Рассказать своего рода математическую историю, где каждый следующий шаг – логическое следствие предыдущих. Каждое очередное утверждение должно быть подкреплено отсылкой к предыдущим и быть выводом из них. Евклид понимал, что этот процесс не может идти вглубь до бесконечности: он должен с чего-то начинаться, и начальное утверждение не требует доказательств: иначе пришлось бы начинать действия с чего-то еще.

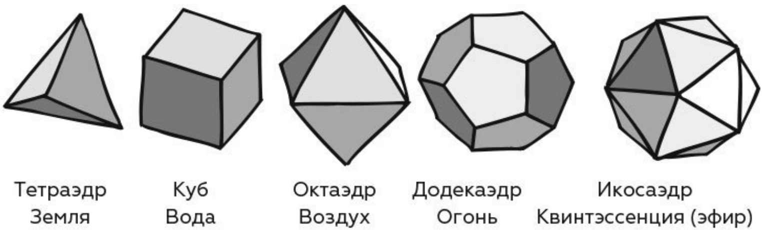
Чтобы запустить процесс, Евклид составил несколько основных определений: четких, ясных утверждений для таких основных «технических» понятий, как *линия* или *круг*, по сути очевидных. Типичный пример такого определения: тупым называется угол больше прямого.

Эти определения предоставили терминологию, необходимую для формулировки не требующих доказательств утверждений, которые Евклид разделил на два вида: *общие утверждения* и *постулаты*. Типичное общее утверждение: объекты, равные одному и тому же, равны и между собой. А типичный постулат: все прямые углы равны между собой.

Мы уже объединили оба эти типа утверждений в один и называем их *аксиомами*. Математические аксиомы – исходные утверждения, не требующие доказательств. Мы считаем, что аксиомы – как правила игры, и верим, что они всегда выполняются. Мы уже не задаемся вопросом, верны ли эти правила, – мы уже не думаем, что эта игра единственная в своем роде. Всякий, кто собирается участвовать в какой-то конкретной игре, должен соблюдать ее правила; иначе он волен выбрать другую, но в ней правила первой не будут работать.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильный многогранник, или платоново тело, – выпуклый многогранник, который состоит из равных граней в виде правильных многоугольников и имеет равное число ребер, выходящих из каждой вершины. Пифагорейцы описывали пять таких правильных многогранников.



Пять платоновых тел

- Тетраэдр образован четырьмя правильными треугольниками.
- Куб (гексаэдр) образован шестью квадратами.
- Октаэдр образован восемью правильными треугольниками.
- Додекаэдр образован 12 правильными пятиугольниками.
- Икосаэдр образован 20 правильными треугольниками.

Их связывали с четырьмя стихиями Античности: землей, воздухом, огнем и водой – и с пятым элементом – квинтэссенцией.

Во времена Евклида и позже, почти 2000 лет, математикам такое не могло и в голову прийти. Практически все относились к аксиомам как к самоочевидным истинам, чью незыблемость никто не посмел бы оспорить. Евклид недаром приложил все свои таланты, чтобы сделать аксиомы именно такими, – и почти преуспел. Однако одна – аксиома параллельности – оказалась особенно сложной и не такой уж очевидной. Многие ученые пытались вывести ее из более простых общих понятий. Позже мы увидим, к каким поразительным открытиям привели эти попытки.

Опираясь на эти простые утверждения, «Начала» обеспечивали доказательства всё более сложных геометрических теорем. Например, в книге I, теореме 5 доказывается, что углы у основания равнобедренного треугольника (у которого две стороны одинаковой длины) равны. Эта теорема была известна целому поколению викторианских школьников как *pons asinorum*, или «мост ослов»: чертеж, используемый в доказательстве Евклида, напоминал мост. Вдобавок это был первый серьезный камень преткновения для школяров, которые пытались зазубрить теорему, а не понять ее. В книге I, теореме 32 доказано, что сумма углов треугольника на плоскости равна 180°. В книге I, теореме 47 сформулирована теорема Пифагора.

Евклид выводил каждую свою теорему из уже доказанных теорем и разных аксиом. Он выстроил башню логики, которая тянулась всё выше, опираясь на фундамент из аксиом и используя логические выводы в качестве строительного раствора, скреплявшего кирпичи.

Сегодня нас уже не до конца удовлетворяет логика Евклида, потому что в ней есть множество прорех. Евклид слишком многие вещи принимает как данность, в наше время его список аксиом не считается полным. Например, кажется очевидным, что если линия проходит через какую-либо точку внутри круга, то она должна где-то пересекать круг, если продлить ее до нужной длины. Да, это очевидно, если вы нарисуете чертеж, но есть примеры, показывающие, что это вовсе не следует из аксиом Евклида. Евклид был выдающимся ученым, но слишком убежденным в том, что свойства, явно очевидные на чертежах, не нуждаются ни в доказательстве, ни в аксиоматике.

Всё гораздо серьезнее, чем кажется на первый взгляд. Есть немало известных примеров ошибочных суждений, ставших следствием мелких ошибок на изображении. Одно из них – «доказательство», что всякий треугольник имеет две равные стороны.

ЕВКЛИД АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ
325–265 гг. до н. э.

Евклид известен благодаря своему труду по геометрии «Начала» – выдающемуся и основополагающему тексту в преподавании математики на протяжении 2000 лет.

О жизни Евклида известно очень мало. Он

преподавал в Александрии. Примерно в 45 г. до н. э. греческий философ Прокл писал: *«Евклид ‹…› жил во времена Птолемея Первого ‹…› потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает о Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели "Начала"; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Значит, Евклид был старше платоновского кружка, но моложе Архимеда и Эратосфена ‹…› он был поклонником Платона, исповедовал его философию и в знак этого в своих "Началах" назвал правильные многогранники платоновыми телами, составляющими основу Вселенной»*.

Золотое сечение

Книга V «Начал» уводит нас в новом и неизведанном направлении от книг с первой по четвертую. Она непохожа на традиционную геометрию и, по сути, кажется бессмысленным набором слов. Как, например, понимать утверждение: «Если одни величины равно кратны по отдельности другим величинам, то и все первые совместно кратны всем вторым» (предложение 1 книги V)?

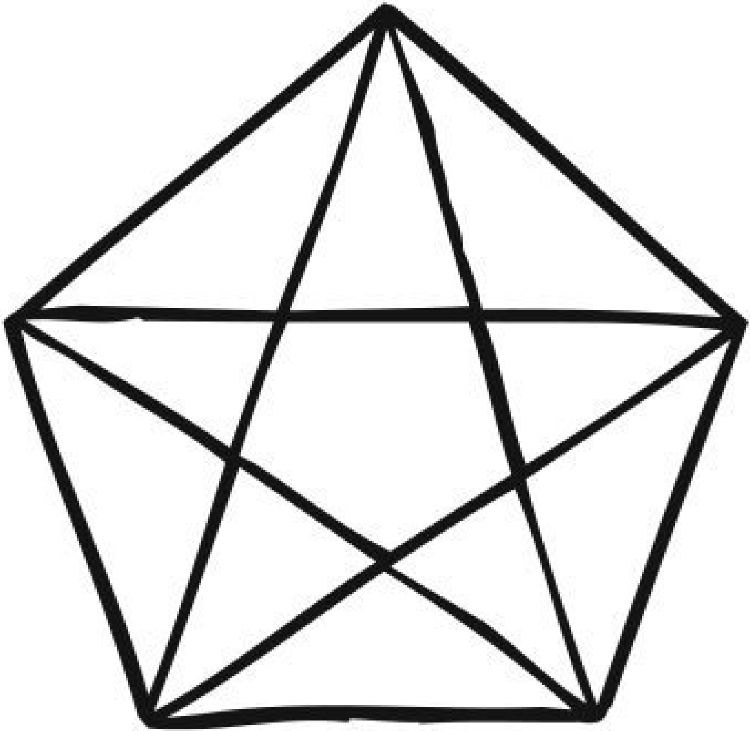
И дело не в изложении (которое я упростил). Доказательство ясно показывает нам, что имел в виду Евклид. Английский математик XIX в. Август де Морган изложил это понятным языком в своей книге по геометрии: «Десять футов десять дюймов в десять раз больше, чем один фут и один дюйм».

Чего же добивался Евклид? Пытался придать банальности вид теоремы? Или загадочной глупости? Вовсе нет. Для нас это темная материя, но она подводит к самой важной части «Начал» – общей теории отношений, построенной Евдоксом Книдским. Современные математики предпочитают работать с числами. Нам это привычнее, поэтому я часто буду переводить идеи древних греков на этот язык.

Евклид не избежал трудностей при работе с иррациональными числами. Кульминацией «Начал» – и, возможно, их главной темой – стало доказательство существования пяти правильных многогранников: тетраэдра, куба (гексаэдра), октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Евклид доказывает два допущения: больше не существует других правильных многогранников; эти пять действительно существуют: их можно построить геометрически, и их грани совпадают совершенно точно.

Два правильных многогранника, додекаэдр и икосаэдр, включают пятиугольники: у додекаэдра грани имеют форму пятиугольников, а каждые пять граней икосаэдра, собранные вокруг общего угла, образуют пятиугольник. Правильные пятиугольники связаны с тем, что Евклид называет «крайним и средним отношением». На отрезке *AB* точка *C* располагается так, что отношение *AB: AC* равно отношению *AC: BC*. Меньшая часть отрезка относится к большей, как бóльшая ко всему отрезку. Если вы нарисуете пятиугольник и впишете в него пятиконечную звезду, стороны последней будут относиться к сторонам пятиугольника точно так же.

В наши дни это отношение известно как *золотое сечение*. Оно равно $(1 + \sqrt{5}) / 2$, и это иррациональное число. Оно приблизительно равно 1,618. Древние греки смогли доказать, что оно иррационально, с помощью геометрических свойств пятиугольника. Значит, и Евклид, и его предшественники отдавали себе отчет в том, что для полного понимания свойств додекаэдра и икосаэдра им придется иметь дело с иррациональными числами.



Отношение диагоналей к сторонам образует золотое сечение

Крайнее и среднее отношение (золотое сечение). Длина верхнего отрезка относится к длине среднего так же, как длина среднего – к нижнему

Таков традиционный взгляд, изложенный в «Началах». Дэвид Фоулер в своей книге «Математики Академии Платона» («The Mathematics of Plato’s Academy») утверждает, что это может толковаться иначе. Возможно, главной темой труда Евклида была теория иррациональных чисел, а рассуждения о правильных многогранниках – второстепенное приложение к ней. Действительно, мы можем интерпретировать текст Евклида по-разному, но одна особенность «Начал» говорит в пользу этой альтернативной теории. Основная часть теории чисел не нуждается в классификации правильных многогранников. Зачем же тогда Евклид включил их в свой труд? И только их прямая связь с теорией иррациональных чисел делает понятным такой ход.

Архимед

Величайшим из древних математиков считается Архимед. Он сделал важнейший вклад в геометрию, был первопроходцем в деле приложения математики ко всем явлениям мира и непревзойденным инженером. Но для математиков он будет памятен прежде всего исследованиями формы круга, шара и цилиндра. Для нас они связаны с числом π (пи), приблизительно равным 3,14159. Конечно, греки не работали с π напрямую: они представляли его геометрически, как отношение длины окружности к диаметру.

Ранние культуры уже имели представление о том, что длина окружности всегда одинаково соотносится с ее диаметром и что она длиннее примерно в три раза, может, чуть больше. Вавилоняне считали это число равным $3\ {}^{1}/_{8}$. Известное нам по школе знаменитое приближение для числа π – «архимедово число», равное $3\ {}^{1}/_{7}$, – ближе к истине, но тоже неточное. Архимед пошел намного дальше, в духе Евдокса подведя твердые доказательства под свои результаты. Насколько смогли установить древние греки, отношение между длиной окружности и диаметром должно быть иррациональным числом. И сейчас мы точно знаем, что так оно и есть, хотя с доказательством пришлось подождать до 1761 г., когда его открыл Иоганн Генрих Ламберт. Но как бы то ни было, Архимед, не сумев доказать, что π – рациональное число, вынужден был принять, что оно иррациональное.

Греческая геометрия лучше всего работает с многоугольниками – фигурами, образованными прямыми линиями. Но окружность – кривая, и Архимед подбирается к ней с помощью аппроксимирующих многоугольников. Чтобы вычислить π, он сравнил длину круга с периметрами многоугольников двух последовательностей: в одной фигуры были вписаны в круг, в другой – описаны вокруг него. Периметр прямоугольника в круге должен был быть меньше длины окружности, а периметр наружного – больше. Для простоты Архимед брал правильные многоугольники, деля их стороны пополам, начиная с шестиугольника и получая соответственно 12 сторон, 24, 48 и т. д. Он остановился на 96. Его вычисления дали результат $3\ ^{10}/_{71} < \pi < 3\ ^{1}/_{7}$, т. е. значение π оказалось между 3,1408 и 3,1429.

Архимедовы исследования шара заслуживают особого внимания: мы не только знакомы с его строгим доказательством, но и знаем, как оно было открыто, – и уж в этой истории никакой строгости нет. Обоснование приводится в его книге «О шаре и цилиндре». Он доказывает, что объем шара равен двум третям от объема описанного около него цилиндра, а площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности этого цилиндра. Говоря современным языком, Архимед доказал, что объем шара равен $^{4}/_{3}\ \pi r^{3}$, где r – радиус; а площадь его поверхности равна $4\pi r^2$. Эти формулы используются и по сей день.

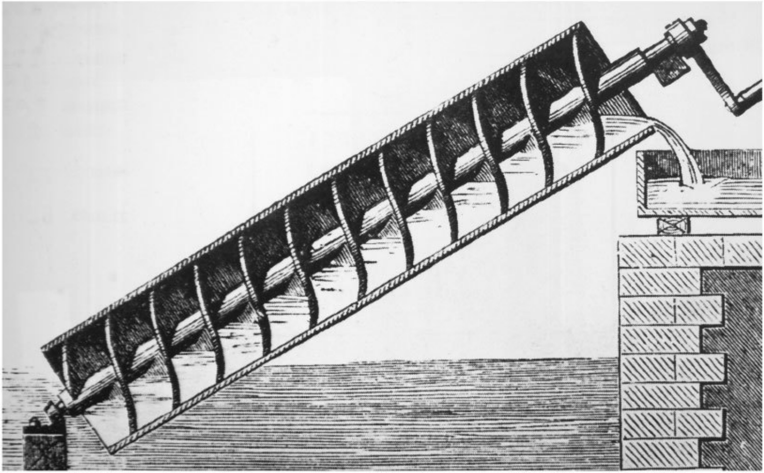
В доказательствах Архимед использовал метод исчерпывания. Он имеет важное ограничение: вам необходимо знать результат заранее, чтобы повысить свои шансы доказать его. Много веков ученые не могли понять, как Архимеду удалось это узнать. Но в 1906 г. голландский ученый Йохан Гейберг наткнулся на пергамент XIII в. с записанными на нем псалмами и обнаружил под ними более ранние стертые записи. Оказалось, это труды Архимеда, причем некоторые из них были неизвестны. Такие документы (записи, затертые на пергаменте ради новых текстов) называются палимпсестами. (Поразительно, но этот же манускрипт содержит еще две утраченные работы древних авторов.) Одна из работ Архимеда, «Послание к Эратосфену о методе» (книга «Метод механических теорем»), объясняет, как угадать объем шара. Идея в том, чтобы нарезать фигуру на сколь угодно тонкие слои и поместить их на одном конце рычага, а на другом – такие же слои цилиндра и конуса, чьи объемы Архимед уже умел вычислять, и взвесить. По закону равновесия рычага мы найдем требуемое значение объема шара. Сам пергамент был приобретен частным лицом за 2 млн долл. в 1998 г.

АРХИМЕД СИРАКУЗСКИЙ
287–212 гг. до н. э.

Архимед родился в греческих Сиракузах в семье астронома Фидия. Он побывал в Египте, где предположительно изобрел архимедов винт, который вплоть до наших дней широко используется для подъема воды из Нила в ирригационные каналы. Предположительно он побывал и в Александрии у Евклида; по крайней мере, он точно вел переписку с александрийскими математиками.

Его математические способности были непревзойденными и обширными. Он использовал их в полном объеме и построил огромные боевые машины, пользуясь своим законом рычага, чтобы забрасывать врагов тяжелыми обломками камней. Его машины оказались незаменимы во время обороны Сиракуз, осажденных римлянами в 212 г. до н. э. Он даже сумел использовать оптическую геометрию отраженного света, чтобы поджечь атаковавшие город с моря римские корабли.

До наших дней сохранились его работы «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах», «О равновесии плоских фигур», «О плавающих телах», «Измерение круга», «Псаммит» («Исчисление песчинок»), а также «Стомахион» и «Послание к Эратосфену о методе», обнаруженные в 1906 г. Йоханом Гейбергом.



Архимедов винт

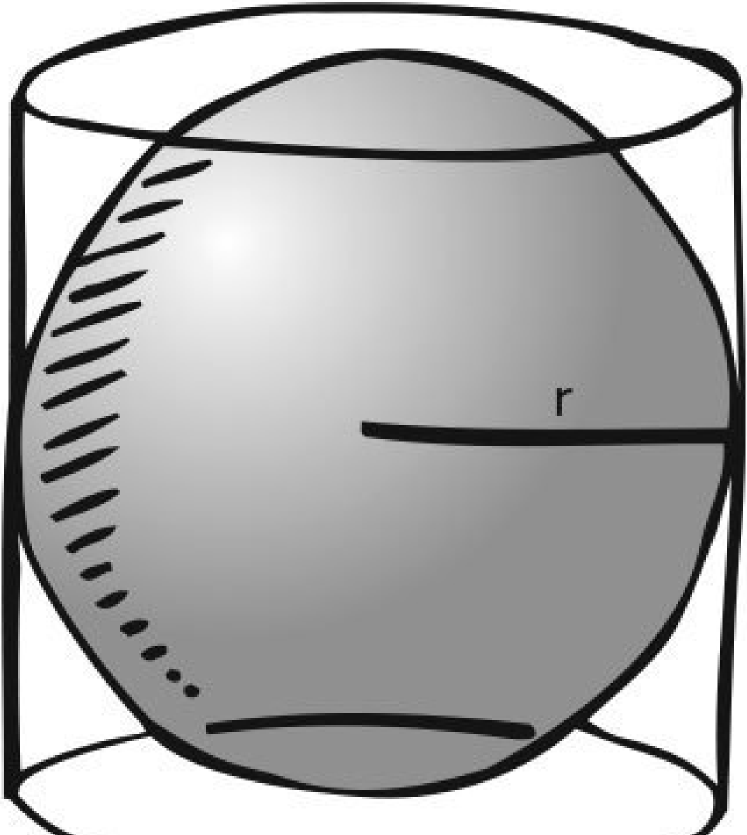
π С БОЛЬШОЙ ТОЧНОСТЬЮ

С помощью более изощренных методов значение π несколько раз определялось с точностью до миллиардных долей. Эти вычисления интересны использованными методами, в качестве теста для компьютеров, а также из научного любопытства, хотя их результат не имеет особого значения. На практике обычно достаточно пяти-шести цифр после запятой. Последним рекордом было число с 1,24 трлн цифр, вычисленное Ясумаса Канадой и командой из девяти сотрудников в декабре 2002 г.[1] Работа длилась 600 часов и проводилась на суперкомпьютере фирмы Hitachi.

[1] А 19 октября 2011 г. Александр Йи и Сигэру Кондо рассчитали число с точностью в 10 трлн цифр после запятой. *Прим. науч. ред.*

Проблемы древних греков

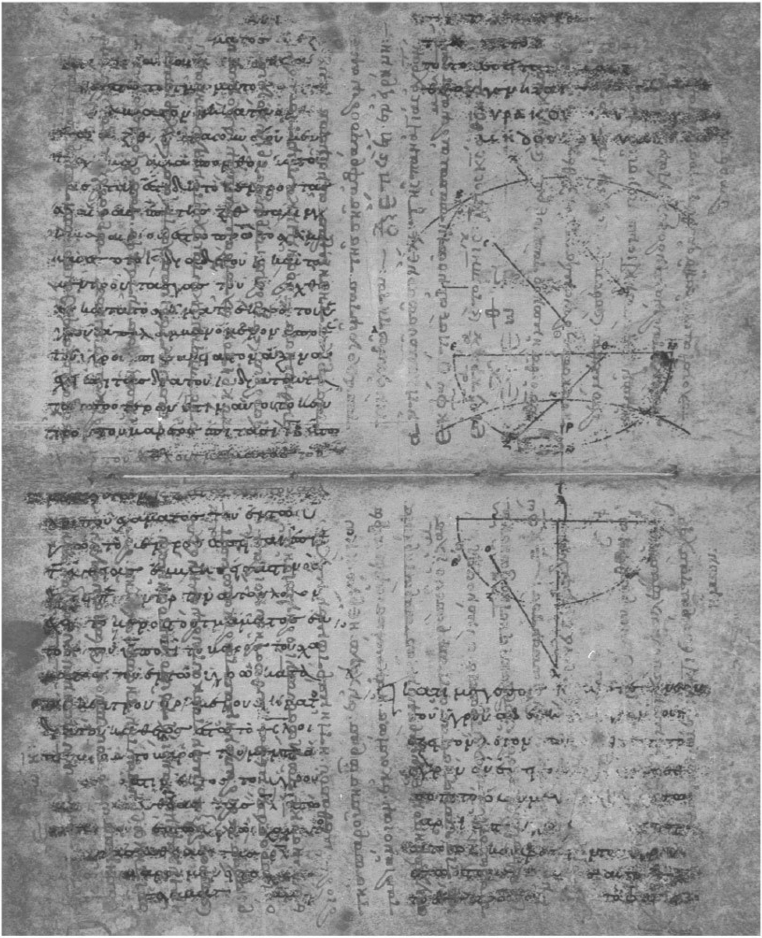
Греческая геометрия имела ограничения; некоторые из них удалось преодолеть благодаря применению новых методов и концепций. Евклид фактически ограничил геометрические чертежи теми, что можно было выполнить с помощью линейки без делений и пары ножек циркуля (здесь акцент на слове «циркуль»: слово «пара» используется так же, как в выражении «резать бумагу парой ножниц», так что не будем излишне педантичны). Иногда говорят, что он сделал это обязательным требованием, но оно касалось его чертежей, а не общих правил. С помощью дополнительных инструментов можно было построить и иные фигуры – идеальные в той же степени, в какой может быть идеальным круг, начерченный циркулем.



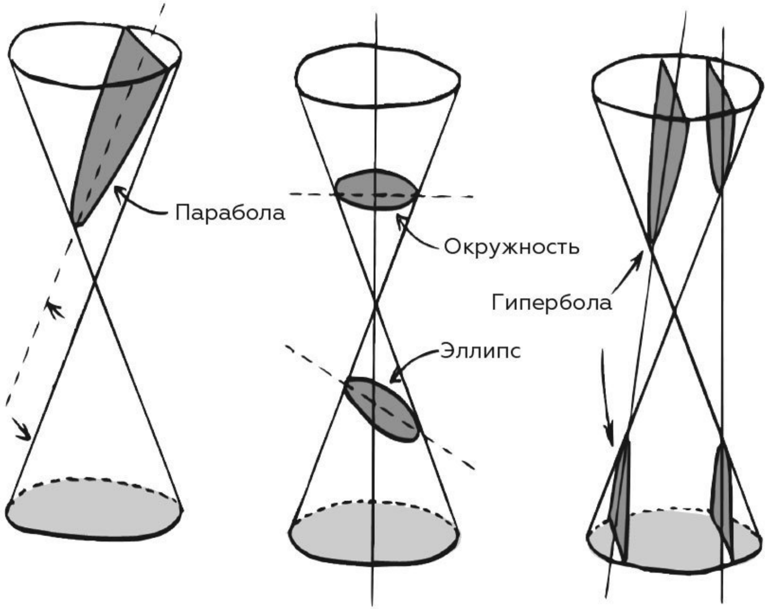
Шар и описанный вокруг него цилиндр

Например, Архимед знал, что вы можете сделать трисекцию угла при помощи линейки с двумя зафиксированными метками. Греки называли этот метод построения «невсис». Теперь нам известно (судя по всему, это уже предполагали греки), что точная трисекция угла при помощи линейки и циркуля невозможна, а значит, вклад Архимеда расширил границы возможного. Еще две знаменитые проблемы того времени – удвоение куба (построение тела, чей объем вдвое больше объема исходного) и квадратура круга – построение квадрата, равновеликого площади заданного круга. Их также невозможно решить только при помощи циркуля и линейки.

Дальнейшее расширение разрешенных операций в геометрии – введение нового вида кривых, конических сечений, – отразилось в арабских работах о кубических уравнениях, созданных около 800 г. н. э., и широко применялось в механике и астрономии. Эти кривые, что крайне важно для истории математики, получаются при пересечении плоскости с двойным конусом.



Палимпсест с трудами Архимеда



Конические сечения

Сегодня мы знаем три главных типа таких конических сечений.

• Эллипс – замкнутая овальная кривая – возникает, когда плоскость пересекает только одну половину конуса. Окружность – разновидность эллипса.

• Гипербола – кривая с двумя бесконечно длинными ветвями – получается, когда плоскость пересекает обе половины конуса.

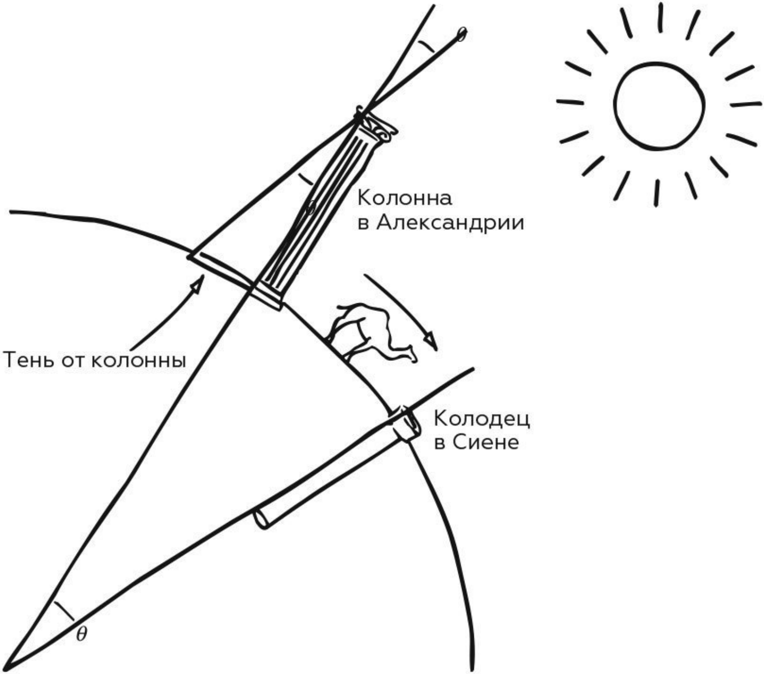
• Парабола – переходная кривая между эллипсом и гиперболой, параллельная воображаемой линии, проходящей через вершину конуса и лежащей на его поверхности. Имеет только одну ветвь, уходящую в бесконечность.

Конические сечения подробно изучал Аполлоний Пергский, перебравшийся из Перги в Малой Азии в Александрию, чтобы учиться у последователей Евклида. Его главный труд, «Конические сечения», написан около 230 г. до н. э. и содержит 487 теорем. Евклид и Архимед лишь косвенно изучили некоторые свойства конусов, но пришлось написать целую книгу, чтобы собрать все теоремы Аполлония. Одна из важнейших его идей заслуживает особого внимания. Это упоминание о фокусах эллипса (либо гиперболы). Фокусы – две особые точки, характерные для этих двух фигур. Они имеют много свойств, но для нас важно одно: сумма расстояний от любой точки эллипса до обоих его фокусов есть величина постоянная (равная удвоенному большому диаметру эллипса). Фокусы гиперболы имеют то же свойство, но здесь этой же постоянной величине соответствует разница между аналогичными расстояниями.

ЧТО ГЕОМЕТРИЯ ДАЛА ИМ

Примерно в 250 г. до н. э. Эратосфен Киренский использовал геометрию для определения размеров Земли. Он заметил, что в полдень летнего солнцестояния светило находится практически прямо над Сиеной (нынешним Асуаном), поскольку его лучи падают прямо в вертикальную штольню колодца. В тот же день года тень от высокой колонны в Александрии показывает, что солнце отклонилось на $^{1}/_{50}$ от полной окружности (около 7,2º) от вертикали. Греки знали, что Земля круглая, а Александрия расположена практически на одном меридиане с Сиеной, и, согласно геометрии, дуга окружности сферы совпадет с расстоянием от Александрии до Сиены и равна 0,02 окружности Земли.

Эратосфен знал, что верблюду нужно 50 дней на переход от Александрии до Сиены, если он будет проходить каждый день по 100 стадий. Значит, расстояние от Александрии равно 5000 стадий, а длина окружности Земли равна 250 тыс. стадий. К несчастью, мы не можем точно сказать, какова была длина стадии у древних греков. Наиболее вероятной величиной считается 157 м, т. е. окружность Земли по данным Эрастофена равна 39 250 км. Современные данные – 39 840 км.



Как Эратосфен измерил окружность Земли

С помощью конусов греки производили трисекцию угла и удвоение куба. При помощи других специальных кривых, особенно квадратрисы, они также могли найти квадратуру круга.

Древние греки внесли две основные идеи в развитие нашей цивилизации. Первая – систематизированный подход к геометрии. Используя ее как инструмент исследований, греки открыли форму и размеры нашей планеты, ее взаимодействие с Солнцем и Луной и даже сложнейшие связи с остальной Солнечной системой. Они использовали геометрию, прокладывая два туннеля с обоих концов так, чтобы они точно встречались посередине, тем самым вдвое сокращая время строительства. Они умели строить гигантские и мощные механизмы, исходя из таких простейших принципов, как закон рычага, и в мирных, и в военных целях. Они использовали геометрию для строительства кораблей и в архитектуре. Такие их постройки, как Парфенон, до сих пор показывают, что математика и красота неразрывны. Поразительная элегантность Парфенона – результат искусных подсчетов, использованных архитекторами для преодоления ограничений визуального восприятия и избавления от ошибок в самом основании, на котором построен храм.

Второй важный вклад древних греков – систематическое использование логических заключений для подтверждения формулы: то, что утверждается, может быть доказано. Эта философия породила логическую аргументацию, но свою самую убедительную форму она приобрела в геометрии Евклида и его последователей. Дальнейшее развитие математики было бы невозможным без этого прочного логического фундамента.

Новый стадион Уэмбли. В постройке использованы принципы, открытые в Древней Греции и успешно развитые за много веков

ГИПАТИЯ АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ
Около 370–415 гг. н. э.

Гипатия – первая женщина-математик, о которой упоминается в письменных источниках. Она была дочерью Теона Александрийского, тоже математика, и, скорее всего, училась у него. К 400 г. н. э. она возглавила александрийскую школу неоплатонистов и преподавала там философию и математику. Многие исторические источники подтверждают ее учительский талант.

Конец ознакомительного фрагмента.