

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет»

Ю.А. Барков, Г.Н. Вотинов, О.М. Зверев, А.В. Перминов

## **КРАТКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

*Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета  
2015

УДК 53(075)  
ББК 22.3я73  
К78

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Демин*  
(Пермский государственный национальный  
исследовательский университет);  
кандидат физико-математических наук, доцент *В.В. Бурдин*  
(Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет)

К78 **Краткий** курс общей физики : учеб. пособие / Ю.А. Барков,  
Г.Н. Вотинин, О.М. Зверев, А.В. Перминов. – Пермь : Изд-во Перм.  
нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 407 с.

ISBN 978-5-398-01527-0

Приведены необходимые материалы для самостоятельного изучения физики, включающие в себя основные теоретические сведения, методику решения задач, контрольные и лабораторные работы, справочные материалы.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 53(075)  
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-398-01527-0

© ПНИПУ, 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	<b>8</b>
<b>Часть I. Теоретические основы общей физики</b> .....	<b>9</b>
<b>Глава 1. Механика</b> .....	<b>9</b>
1.1. Кинематика .....	9
1.1.1. Кинематика точки (поступательного движения).....	9
1.1.2. Кинематика вращательного движения .....	14
1.1.3. Связь между линейными и угловыми величинами .....	17
<i>Примеры решения задач</i> .....	19
1.2. Динамика.....	22
1.2.1. Динамика точки (поступательного движения) ...	22
1.2.2. Динамика системы.....	29
1.2.3. Динамика вращательного движения.....	31
1.2.4. Работа, мощность, энергия .....	35
<i>Примеры решения задач</i> .....	40
1.3. Колебательное движение.....	48
1.3.1. Характеристики колебаний .....	48
1.3.2. Маятники .....	51
1.3.3. Сложение колебаний .....	55
1.3.4. Затухающие колебания .....	60
1.3.5. Вынужденные колебания.....	63
1.3.6. Волновое движение .....	65
<i>Примеры решения задач</i> .....	73
1.4. Основы гидроаэромеханики.....	77
1.4.1. Статика жидкостей и газов .....	78
1.4.2. Движение жидкостей и газов .....	79
<i>Примеры решения задач</i> .....	81
<b>Глава 2. Молекулярная физика и термодинамика</b> .....	<b>83</b>
2.1. Молекулярно-кинетическая теория.....	83
2.1.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории .....	83
2.1.2. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы.....	86
2.1.3. Средняя энергия молекул .....	89

2.1.4. Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям .....	91
2.1.5. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.....	93
2.1.6. Явления переноса в газах .....	94
2.1.7. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	98
<i>Примеры решения задач</i> .....	100
2.2. Термодинамика .....	102
2.2.1. Термодинамическая система.....	102
2.2.2. Внутренняя энергия, работа и теплота. Первое начало термодинамики .....	104
2.2.3. Теплоемкость и внутренняя энергия идеального газа .....	107
2.2.4. Адиабатический и политропические процессы.....	110
2.2.5. Энтропия .....	112
2.2.6. КПД тепловой машины. Цикл Карно.....	116
2.2.7. Второе начало термодинамики.....	118
<i>Примеры решения задач</i> .....	120
<b>Глава 3. Электродинамика .....</b>	<b>123</b>
3.1. Электростатика .....	123
3.1.1. Электрический заряд и его свойства.....	123
3.1.2. Напряженность электростатического поля .....	125
3.1.3. Энергия взаимодействия зарядов .....	126
3.1.4. Поток напряженности электрического поля. Теорема Гаусса .....	130
3.1.5. Электростатическое поле в диэлектриках .....	133
3.1.6. Проводники в электростатическом поле .....	138
3.1.7. Энергия электрического поля .....	142
<i>Примеры решения задач</i> .....	144
3.2. Постоянный электрический ток .....	148
3.2.1. Характеристики и условия существования постоянного тока .....	148
3.2.2. Закон Ома.....	151
3.2.3. Правила Кирхгофа .....	152
3.2.4. Закон Джоуля – Ленца .....	153
<i>Примеры решения задач</i> .....	154
3.3. Магнетизм.....	159
3.3.1. Основные свойства магнитного поля.....	159

3.3.2. Закон Ампера. Сила Лоренца .....	164
3.3.3. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции.....	167
3.3.4. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле .....	169
3.3.5. Магнитное поле в веществе.....	170
3.3.6. Электромагнитная индукция.....	175
3.3.7. Энергия магнитного поля .....	183
3.3.8. Уравнения Максвелла .....	185
<i>Примеры решения задач.....</i>	<i>189</i>
3.4. Электромагнитные колебания и волны.....	193
3.4.1. Колебательный контур.....	193
3.4.2. Свободные затухающие колебания .....	197
3.4.3. Вынужденные электромагнитные колебания.	
Полная цепь переменного тока.....	198
3.4.4. Мощность в цепи переменного тока.....	202
3.4.5. Электромагнитные волны.....	204
<i>Примеры решения задач.....</i>	<i>207</i>
<b>Глава 4. Оптика.....</b>	<b>210</b>
4.1. Элементы геометрической оптики .....	210
4.1.1. Основные законы геометрической оптики .....	210
4.1.2. Линзы .....	213
4.1.3. Принцип Ферма .....	215
<i>Примеры решения задач.....</i>	<i>216</i>
4.2. Основы волновой оптики .....	218
4.2.1. Световая волна.....	218
4.2.2. Интерференция света .....	220
4.2.3. Дифракция.....	230
4.2.4. Поляризация.....	239
<i>Примеры решения задач.....</i>	<i>244</i>
4.3. Основы квантовой оптики.....	250
4.3.1. Тепловое излучение.....	250
4.3.2. Фотоэффект.....	255
4.3.3. Корпускулярно-волновой дуализм.....	260
<i>Примеры решения задач.....</i>	<i>263</i>
<b>Глава 5. Основы атомной и ядерной физики .....</b>	<b>266</b>
5.1. Строение атома.....	266
5.1.1. Закономерности в атомных спектрах .....	266
5.1.2. Модели атома.....	267

5.2. Волновые свойства вещества.....	273
5.2.1. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества .....	273
5.2.2. Принцип неопределенности.....	277
<i>Примеры решения задач</i> .....	280
5.3. Атомное ядро .....	283
5.3.1. Состав и характеристики атомного ядра .....	283
5.3.2. Ядерные силы. Энергия связи атомных ядер ....	284
5.3.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада.....	287
5.3.4. Ядерные реакции. Элементы ядерной энергетики .....	290
5.4. Элементарные частицы .....	295
<i>Примеры решения задач</i> .....	300
5.5. Элементы космологии.....	302
<b>Часть II. Контрольные и лабораторные работы.....</b>	<b>306</b>
1. Методические указания для самостоятельного изучения теоретической части курса .....	306
2. Методические указания к выполнению практической части курса.....	308
3. Контрольные работы .....	310
Контрольная работа № 1. Механика и молекулярная физика .....	310
Контрольная работа № 2. Электростатика и постоянный ток.....	326
Контрольная работа № 3. Магнетизм. Волновая оптика .....	335
Контрольная работа № 4. Квантовая оптика. Атомная и ядерная физика.....	348
4. Лабораторные работы .....	354
Лабораторная работа № 1. Обработка результатов измерений на примере задачи определения объема цилиндра.....	354
Лабораторная работа № 2. Маятник Обербека .....	368
Лабораторная работа № 3. Физический маятник.....	373
Лабораторная работа № 4. Исследование электростатических полей .....	376
Лабораторная работа № 5. Определение внутреннего сопротивления и ЭДС источника тока .....	379

Лабораторная работа № 6. Определение магнитной индукции в межполюсном зазоре прибора магнитоэлектрической системы .....	383
Лабораторная работа № 7. Определение длины волны света с помощью бипризмы Френеля .....	388
Лабораторная работа № 8. Изучение явления дифракции света с помощью дифракционной решетки.....	392
Лабораторная работа № 9. Исследование фотоэлементов.....	394
Список рекомендуемой литературы .....	398
Приложение .....	399

## ВВЕДЕНИЕ

*Физика* – наука, изучающая наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

*Физические законы* устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают закономерности, существующие в природе. Эти законы обычно формулируются в виде количественных соотношений между различными физическими величинами.

Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы.

*Гипотеза* – научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется постановкой соответствующих опытов. Успешно прошедшая такую проверку и доказанная гипотеза превращается в *научную теорию* или *закон*.

Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих закономерности явлений природы. Физическая теория дает объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.



# **ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

## **1. МЕХАНИКА**

*Механика* – раздел физики, в котором изучается механическое движение.

*Механическое движение* – изменение положения данного тела (или частей тела) относительно других тел, происходящее во времени и пространстве.

### **1.1. Кинематика**

*Кинематика* – раздел механики, в котором изучается механическое движение как геометрическое перемещение в пространстве.

#### **1.1.1. Кинематика точки (поступательного движения)**

*Материальная точка* – тело, размеры которого несущественны (ими можно пренебречь) в рамках какой-либо конкретной задачи.

*Абсолютно твердое тело* – тело, у которого расстояние между любыми двумя его точками неизменно.

*Поступательное движение* абсолютно твердого тела – движение, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

*Число степеней свободы  $i$*  – число независимых координат, с помощью которых можно задать положение тела в пространстве.

#### **Примеры:**

1) точка в трехмерном пространстве имеет три независимых координаты (точка  $A(x, y, z)$ ), следовательно,  $i = 3$ ;

2) две жестко связанные точки (гантель) задаются шестью координатами, но независимыми являются только пять, так как на точки наложена одна связь – неизменность расстояния между ними (шестую координату можно определить из этого условия), поэтому  $i = 6 - 1 = 5$ ;

3) три жестко связанные точки, не лежащие на одной прямой, имеют девять координат и три связи, отсюда  $i = 9 - 3 = 6$ .

Системы с большим числом точек имеют также шесть степеней свободы, так как на три координаты добавленной жестко закрепленной точки достаточно трех связей. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Движение относительно, поэтому для описания движения (в пространстве и времени) вводится понятие *системы отсчета*, которое включает в себя: 1) точку отсчета; 2) систему координат; 3) прибор для измерения времени.

*Траектория* – линия, вдоль которой движется точка.

*Путь*  $s$  – длина траектории. Единица измерения длины – *метр*,  $[s] = \text{м}$ .

*Средняя путевая скорость*  $v_{\text{cp}}$  – отношение пройденного пути к затраченному времени,

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad [v] = \text{м/с}. \quad (1.1)$$

Положение тела в пространстве определяется с помощью радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного к этой точке из некоторой неподвижной точки (рис. 1.1).

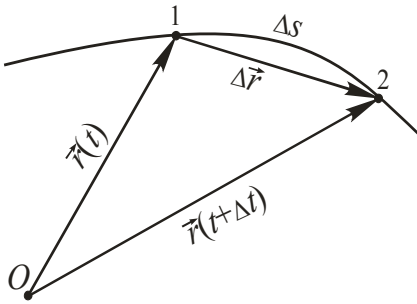


Рис. 1.1

Закон движения – зависимость радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.2)$$

Любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и единичные векторы (орты) этих осей. В декартовой ортогональной системе координат (рис. 1.2)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.3)$$

где  $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$

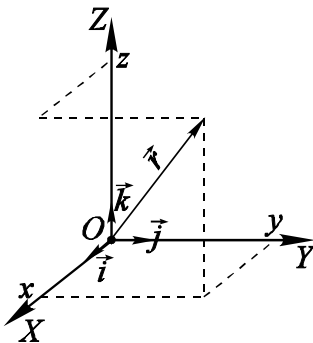


Рис. 1.2

*Перемещение*  $\Delta\vec{r}$  – вектор, проведенный из начальной точки движения в конечную (см. рис. 1.1),

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (1.4)$$

Средняя скорость перемещения  $\vec{v}_{\text{cp}}$  – отношение перемещения к затраченному на него времени:

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Скорость (мгновенная)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.6)$$

Вектор скорости  $\vec{v}$  направлен по касательной к траектории (рис. 1.3).

Модуль скорости

$$\begin{aligned} v = |\vec{v}| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

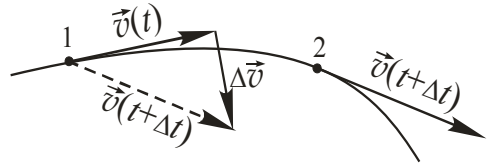


Рис. 1.3

Быстрота изменения скорости со временем характеризуется ускорением. Средним ускорением  $\vec{a}_{\text{cp}}$  называют отношение изменения вектора скорости ко времени:

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \Delta \vec{v} / \Delta t, [a] = \text{м/с}^2.$$

Ускорение (мгновенное)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Скорость и ускорение можно разложить на составляющие:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.9)$$

где компоненты – это проекции на координатные оси этих векторов:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}; \\ v_y = \frac{dy}{dt}; \\ v_z = \frac{dz}{dt}; \end{cases} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Модули скорости и ускорения в этом случае находятся по формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.11)$$

При криволинейном движении удобно ввести естественные оси, направления которых задаются единичными векторами касательной  $\vec{\tau}$  и нормали  $\vec{n}$ :  $\vec{\tau} \perp \vec{n}$ ,  $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$ .

Вектор  $\vec{\tau}$  направлен по касательной к траектории (рис. 1.4) и задает направление вектора скорости, вектор  $\vec{n}$  направлен по нормали к траектории (к центру кривизны).

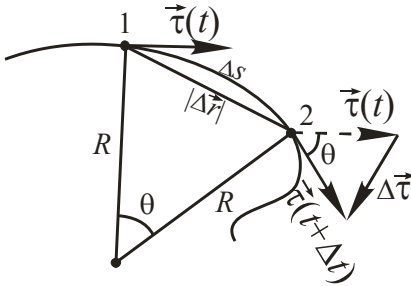


Рис. 1.4

Вектор скорости можно представить в виде

$$\vec{v} = v \vec{\tau}, \quad (1.12)$$

где  $v = |\vec{v}|$ . Тогда по определению

$$\begin{aligned} \text{ускорение} \quad \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \vec{\tau}) = \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\Delta t} \vec{n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \frac{1}{R} \vec{n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{R} \vec{n} = \frac{v}{R} \vec{n},$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории в данной точке, то

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.13)$$

Таким образом, ускорение можно разложить на две составляющие (рис. 1.5).

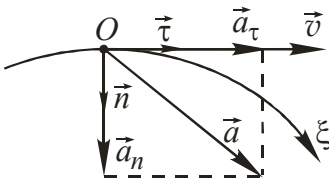


Рис. 1.5

*Касательным (тангенциальным) ускорением  $\vec{a}_\tau$  называется составляющая ускорения, обусловленная изменением модуля вектора скорости:*

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}, \quad (1.14)$$

где  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ .

Нормальным (центростремительным) ускорением  $\vec{a}_n$  называется составляющая ускорения, обусловленная изменением направления движения (т.е. вектора  $\vec{v}$ ):

$$\vec{a}_n = a_n \vec{n}, \quad (1.15)$$

где  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.16)$$

Примеры:

1. При равномерном прямолинейном движении точки вдоль оси  $x$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = \text{const} \Rightarrow a_\tau = 0, \\ R = \infty \Rightarrow a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0.$$

Закон равномерного движения:

$$x = x_0 + v_x t.$$

2. При равнопеременном прямолинейном движении

$$\left. \begin{array}{l} a_{\tau x} = \text{const}, \\ R = \infty \Rightarrow a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_x = a_{\tau x} = \text{const}.$$

Закон изменения скорости:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \quad (1.17)$$

Закон движения:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.18)$$

Исключив параметр времени  $t$  из уравнений (1.17), (1.18), можно прийти к полезному соотношению:

$$x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}. \quad (1.19)$$

3. При равномерном движении по окружности радиусом  $R$

$$\left. \begin{array}{l} v_{\xi} = \text{const} \Rightarrow a_{\tau} = 0, \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow a = a_n = \text{const}.$$

Закон движения:

$$\xi = \xi_0 + v_{\xi}(t - t_0),$$

где  $\xi$  – криволинейная координата, направленная вдоль траектории (см. рис. 1.5).

4. При равнопеременном движении по окружности радиусом  $R$

$$\left. \begin{array}{l} a_{\tau} = \text{const}, \\ a_n = \frac{v^2}{R} \neq \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

Закон изменения скорости:  $v_{\xi} = v_{0\xi} + a_{\tau\xi}(t - t_0)$ .

Закон движения:  $\xi = \xi_0 + v_{0\xi}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{\tau\xi}(t - t_0)^2$ .

Примечание. При поступательном движении абсолютно твердого тела скорости и ускорения всех точек равны по величине и направлению, а траектории всех точек одинаковы, поэтому кинематику поступательно движущегося твердого тела рассматривают как кинематику точки.

### 1.1.2. Кинематика вращательного движения

*Вращательное движение* абсолютно твердого тела – движение, при котором все точки тела в данный момент движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*. Пусть твердое тело, вращаясь вокруг некоторой оси  $OO'$ , совершило за время  $dt$  бесконечно малый поворот. Соответствующий *угол поворота* будем характеризовать вектором  $\overline{d\varphi}$ , модуль которого равен углу поворота  $d\varphi$ , а направление совпадает с осью  $OO'$ , причем так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора  $\overline{d\varphi}$  (рис. 1.6). Единица измерения угла поворота – *радиан*,  $[\varphi] = \text{рад}$ .

Положение некоторой точки  $A$  зададим радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из некоторой точки  $O$  на оси вращения. Тогда модуль линейного перемещения  $|d\vec{r}|$  точки  $A$  связан с углом поворота  $d\varphi$

соотношением  $|\overrightarrow{d\vec{r}}| = r \sin \theta \, d\varphi$ , где  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\overrightarrow{d\varphi}$ . В векторном виде

$$\overrightarrow{d\vec{r}} = \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r}. \quad (1.20)$$

Отметим, что это равенство справедливо лишь для бесконечно малого угла поворота  $d\varphi$ . Другими словами, только бесконечно малые повороты можно рассматривать как векторы. Для конечного поворота на угол  $\Delta\varphi$  линейное перемещение точки  $A$  (см. рис. 1.6)

$$|\Delta\vec{r}| = 2r \sin \theta \sin(\Delta\varphi / 2).$$

Отсюда сразу видно, что перемещение  $\Delta\vec{r}$  нельзя представить как векторное произведение векторов  $\overrightarrow{d\varphi}$  и  $\vec{r}$ . Это возможно лишь в случае бесконечно малого поворота  $\overrightarrow{d\varphi}$ , в пределах которого радиус-вектор  $\vec{r}$  можно считать неизменным.

Введенный вектор  $\overrightarrow{d\varphi}$  удовлетворяет свойству коммутативности векторов. Чтобы убедиться в этом, представим, что твердое тело совершает два элементарных поворота  $\overrightarrow{d\varphi}_1$  и  $\overrightarrow{d\varphi}_2$  вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку  $O$ . В этом случае результирующее перемещение  $d\vec{r}$  произвольной точки  $A$  тела, радиус-вектор которой относительно точки  $O$  равен  $\vec{r}$ , можно представить так:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = \overrightarrow{d\varphi}_1 \times \vec{r} + \overrightarrow{d\varphi}_2 \times \vec{r} = \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r},$$

где

$$\overrightarrow{d\varphi} = \overrightarrow{d\varphi}_1 + \overrightarrow{d\varphi}_2. \quad (1.21)$$

Таким образом, два данных поворота,  $\overrightarrow{d\varphi}_1$  и  $\overrightarrow{d\varphi}_2$ , эквивалентны одному повороту на угол  $\overrightarrow{d\varphi} = \overrightarrow{d\varphi}_1 + \overrightarrow{d\varphi}_2$  вокруг оси, совпадающей с вектором  $\overrightarrow{d\varphi}$  и проходящей через точку  $O$ .

В отличие от таких величин, как  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ , векторы типа  $\overrightarrow{d\varphi}$ , направление которых связывают с направлением вращения, называют *псевдовекторами* или *аксиальными векторами*.

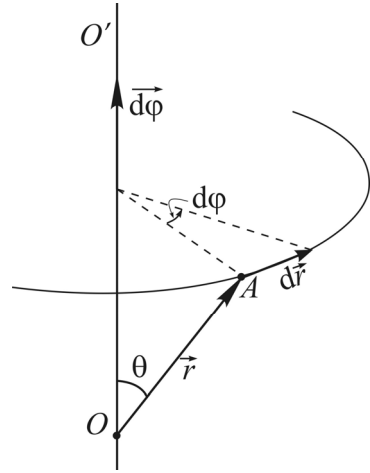


Рис. 1.6

## Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.22)$$

где  $dt$  – промежуток времени, за который тело совершает поворот  $d\vec{\varphi}$ .

Как следует из определения, вектор  $\vec{\omega}$  совпадает по направлению с вектором  $d\vec{\varphi}$  и представляет собой псевдовектор, направленный вдоль оси вращения. Единица измерения угловой скорости – *радиан в секунду*,  $[\omega] = \text{рад/с}$ .

Рассмотрим движение твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}_1$  вокруг оси  $OA$  (рис. 1.7), которая, в свою очередь, вращается вокруг оси  $OB$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2$ . За промежуток времени  $dt$  тело совершит поворот  $d\vec{\varphi}_1$  вокруг оси  $OA$  и одновременно поворот  $d\vec{\varphi}_2$  вокруг оси  $OB$ .

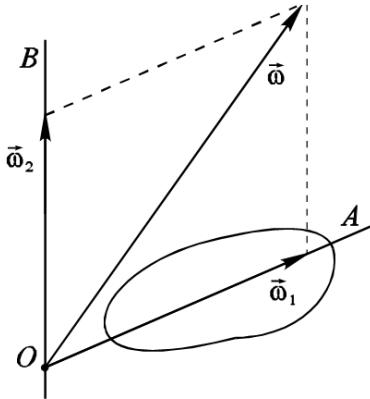


Рис. 1.7

Согласно (1.21) суммарный поворот  $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$ . Поделив обе части этого равенства на  $dt$ , получим закон сложения угловых скоростей:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (1.23)$$

Изменение вектора  $\vec{\omega}$  со временем характеризуют вектором *углового ускорения*, который также является псевдовектором:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad [\varepsilon] = \text{рад/с}^2. \quad (1.24)$$

*Вращение вокруг неподвижной оси* – частный случай вращательного движения. В этом случае траекториями всех точек являются окружности, центры которых лежат на одной неподвижной прямой.

Положение тела в пространстве определяется углом поворота. Закон вращения:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.25)$$



Положительное направление оси свяжем с положительным направлением угловой координаты (угла поворота  $\varphi$ ) правилом правого винта (рис. 1.8).

В случае неподвижной оси угловая скорость характеризуется алгебраической величиной:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.26)$$

Аналогично угловое ускорение

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (1.27)$$

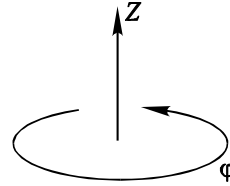


Рис. 1.8

Знак величин  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$  определяется направлением соответствующего вектора. Например, если  $\omega_z > 0$ , то направление вектора  $\vec{\omega}$  совпадает с положительным направлением оси  $Z$ , если же  $\omega_z < 0$ , то направление вектора  $\vec{\omega}$  противоположно (так же и для углового ускорения).

### 1.1.3. Связь между линейными и угловыми величинами

Поделив соотношение (1.20) на соответствующий промежуток времени  $dt$  с учетом (1.6) и (1.22), получаем связь между линейной и угловой скоростями:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.28)$$

Таким образом, скорость  $\vec{v}$  любой точки  $A$  твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , равна векторному произведению угловой скорости  $\vec{\omega}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$  точки  $A$  относительно произвольной точки  $O$  оси вращения (рис. 1.9).

Модуль вектора скорости  $v = \omega r \sin \theta$ , или

$$v = \omega R, \quad (1.29)$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории, по которой движется точка  $A$ .

Продифференцировав соотношение (1.28) по времени, найдем ускорение  $\vec{a}$  точки  $A$ :  $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ , или

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.30)$$

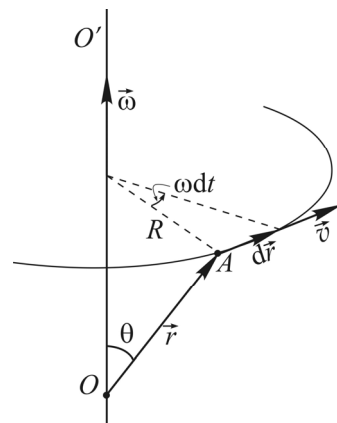


Рис. 1.9

В общем случае нахождение скорости и ускорения точек тела является непростой задачей, уже хотя бы потому, что при повороте оси вращения точка  $O$  не является неподвижной, хотя скорость точки тела в ней равна нулю (по определению). Сложность, в частности, состоит в определении координат радиуса-вектора  $\vec{r}$ .

В случае неподвижной оси  $\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$ , поэтому первое слагаемое соотношения (1.30) будет представлять собой тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (1.31)$$

а второе слагаемое – нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.32)$$

Модули этих ускорений:

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R. \quad (1.33)$$

Тогда полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.34)$$

В кинематике поступательного и вращательного движений существуют следующие *аналогии*:

Поступательное движение		Вращательное движение	
Определения			
Координата	$x, \text{ м}$	Угол поворота	$\varphi, \text{ рад}$
Скорость	$v_x = \frac{dx}{dt}, \text{ м/с}$	Угловая скорость	$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ рад/с}$
Ускорение	$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \text{ м/с}^2$	Угловое ускорение	$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}, \text{ рад/с}^2$
Законы равнопеременного движения			
$a_x = \text{const}$		$\varepsilon_z = \text{const}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$		$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t$	
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$		$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$	

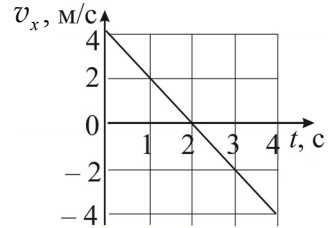
### Примеры решения задач

**№ 1.** Уравнение движения точки по прямой имеет вид:  $x = A + Bt + Ct^3$  ( $A = 4$  м,  $B = 2$  м/с,  $C = 0,2$  м/с<sup>3</sup>). Найдите среднюю скорость за промежуток времени от 2 до 5 с.

Решение.

$$\begin{aligned}\langle v_x \rangle &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(4 + 2 \cdot 5 + 0,2 \cdot 5^3) - (4 + 2 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2^3)}{5 - 2} = \\ &= \frac{39 - 9,6}{3} = 9,8 \text{ м/с.}\end{aligned}$$

**№ 2.** График зависимости проекции скорости тела  $v_x$  на ось  $x$  от времени  $t$  приведен на рисунке. Чему равна проекция ускорения тела на эту ось?



Решение. Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ его проекция на ось } x \text{ } a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Если скорость меняется по линейному закону, то проекцию ускорения можно искать по формуле

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1}.$$

Взяв интервал времени от 0 до 4 с, получим:  $a_x = \frac{-4 - 4}{4 - 0} = -2 \text{ м/с}^2$ .

**№ 3.** Автомобиль начинает движение с ускорением  $1 \text{ м/с}^2$ . Проезжая мимо наблюдателя, он имел скорость  $10,5 \text{ м/с}$ . На каком расстоянии от наблюдателя он находился секунду назад?

Решение. Кинематическое уравнение равнопеременного движения вдоль оси  $x$  ( $a = \text{const}$ ) имеет вид:  $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ , где  $v_0$  – начальная скорость,  $t$  – время. Скорость точки при равнопеременном движении  $v = v_0 + at$ .

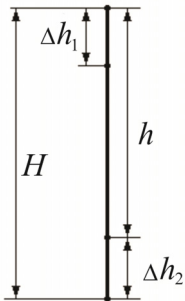
Если автомобиль начинает движение, то  $v_0 = 0$ , и  $v = at$ . Найдем время движения до наблюдателя:

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{10,5}{1} = 10,5 \text{ с}; \quad t_2 = 10,5 - 1 = 9,5 \text{ с}.$$

Примем начальное положение автомобиля за начало отсчета ( $x_0 = 0$ ). Тогда:  $x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{1 \cdot 10,5^2}{2} = 55,125$  м,  $x_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{1 \cdot 9,5^2}{2} = 45,125$  м.

Получим:  $x_1 - x_2 = 55,125 - 45,125 = 10$  м.

**№ 4.** Тело падает вертикально с высоты  $H = 19,6$  м с нулевой начальной скоростью. За какое время тело пройдет первый и последний метры своего пути?



Д а н о:  $H = 19,6$  м,  $v_0 = 0$ ,  $\Delta h_1 = 1$  м,  $\Delta h_2 = H - h = 1$  м,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Р е ш е н и е. Из формулы  $\Delta h_1 = \frac{g \cdot t_1^2}{2}$  найдем время прохождения первого метра:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,8}} = 0,452 \text{ с.}$$

Время прохождения последнего метра найдем как разность времен прохождения путей  $H$  (время падения  $t_{\text{пад}}$ ) и  $h$  (время  $t_0$ ):

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 19,6}{9,8}} = 2 \text{ с}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18,6}{9,8}} = 1,948 \text{ с};$$

$$t_2 = t_{\text{пад}} - t_0 = 2 - 1,948 = 0,052 \text{ с.}$$

**№ 5.** Линейная скорость точек на ободе вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на 0,1 м ближе к оси вращения, имеют линейную скорость 2 м/с. Каковы угловая скорость и частота вращения диска?

Д а н о:  $v_1 = 3$  м/с,  $v_2 = 2$  м/с,  $\Delta R = R_1 - R_2 = 0,1$  м.

Р е ш е н и е. Угловая скорость всех точек диска одинакова и связана с линейной формулой  $\omega = \frac{v}{R}$ . Тогда  $\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}$  или

$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_1 - \Delta R}$ . Подставив числа, получаем уравнение с одним неиз-

вестным  $\frac{3}{R_1} = \frac{2}{R_1 - 0,1}$ , откуда радиус диска  $R_1 = 0,3$  м. Тогда угло-

вая скорость вращения диска  $\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{3}{0,3} = 10$  рад/с; частота вращения

диска  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2 \cdot 3,14} = 1,59$  об/с.

**№ 6.** Колесо радиусом 10 см вращается с постоянным угловым ускорением. К концу 5-го оборота после начала движения линейная скорость точек на ободе колеса равна 0,1 м/с. Определите угловое ускорение колеса.

Д а н о:  $v_0 = 0$  м/с,  $v = 0,1$  м/с,  $R = 0,1$  м,  $N = 5$  об.

Р е ш е н и е. Из уравнений кинематики вращательного движения  $2\varepsilon \cdot \varphi = \omega^2 - \omega_0^2$ , где  $\varepsilon$  – угловое ускорение,  $\varphi$  – угол поворота (угловой путь).

Находим угол поворота и угловую скорость:

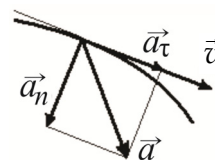
$\varphi = 2\pi N = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4$  рад;  $\omega_0 = 0$  рад/с;  $\omega = \frac{v}{R} = \frac{0,1}{0,1} = 1$  рад/с.

Отсюда угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{1^2}{2 \cdot 31,4} = 0,0159 \text{ рад/с}^2.$$

**№ 7.** Точка движется по окружности радиусом  $R = 2$  м согласно уравнению  $s = 2t^3$ . В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Чему будет равно полное ускорение в этот момент времени?

Р е ш е н и е. При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной  $\vec{a}_n$  и тангенциальной  $\vec{a}_\tau$  составляющих:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ .



Абсолютные значения этих ускорений:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; a_\tau = \frac{dv}{dt}; a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где  $R$  – радиус кривизны в данной точке траектории.

Скорость найдем как первую производную от пути:  $v = s' = 6t^2$ , тангенциальное ускорение – как производную от скорости:  $a_\tau = v' = 12t$ .

$$\text{Нормальное ускорение } a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(6 \cdot t^2)^2}{2} = 18t^4.$$

Приравняв эти ускорения, находим время:  $12 \cdot t = 18 \cdot t^4$ ,  $t = \sqrt[3]{\frac{12}{18}} = 0,874$  с. Тогда:  
 $a_\tau = 12 \cdot t = 12 \cdot 0,874 = 10,5$  м/с<sup>2</sup>;  $a_n = 18 \cdot t^4 = 18 \cdot 0,874^4 = 10,5$  м/с<sup>2</sup>;  
 $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{10,5^2 + 10,5^2} = 14,8$  м/с<sup>2</sup>.

## 1.2. Динамика

*Динамика* – раздел механики, в котором изучаются причины изменения механического движения.

### 1.2.1. Динамика точки (поступательного движения)

#### *Динамические характеристики поступательного движения*

*Масса*  $m$  – свойство тел, определяющее их бесконтактное *взаимодействие* с другими телами и *инертность* (способность сохранять скорость). Единица массы – *килограмм*,  $[m] = \text{кг}$ .

*Импульс тела*  $\vec{p}$  (*количество движения*) – произведение массы тела на вектор его скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}, [p] = \text{кг} \cdot \text{м/с}. \quad (1.35)$$

*Сила*  $\vec{F}$  – векторная величина, являющаяся мерой механического *взаимодействия* материальной точки или тела с другими телами или полями. Для твердых тел вектор силы можно переносить вдоль линии действия.

Различные взаимодействия, известные в современной физике, сводятся к четырем типам, а именно:

- 1) *гравитационное взаимодействие*, возникающее между всеми телами, обладающими массой;
- 2) *электромагнитное взаимодействие* между телами или частицами, обладающими электрическими зарядами;
- 3) *сильное взаимодействие*, существующее, например, между частицами, из которых состоят ядра атомов;
- 4) *слабое взаимодействие*, характеризующее, например, процессы превращения некоторых элементарных частиц.

Сила, как количественная характеристика, позволяет оценивать лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия. В тех чрезвычайно малых областях пространства и в тех процессах, в ко-

торых проявляются сильные и слабые взаимодействия, такие понятия, как точка приложения, линия действия, а вместе с ними и само понятие силы теряют смысл.

Единица силы – *ньютон*,  $[F] = \text{Н}$ .

### *Силы в механике*

В задачах механики учитываются гравитационные силы (силы тяготения) и две разновидности электромагнитных сил – силы упругости и силы реакции (нормальной реакции и трения).

*Силы тяготения* – силы, возникающие между всеми телами в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона: *между двумя материальными точками действуют силы взаимного притяжения, прямо пропорциональные массам этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними (эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей данные материальные точки (рис. 1.10)), т.е.*

$$F_{\text{тяг}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.36)$$

*Гравитационная постоянная*  $G$  – фундаментальная константа, коэффициент пропорциональности в законе всемирного тяготения,

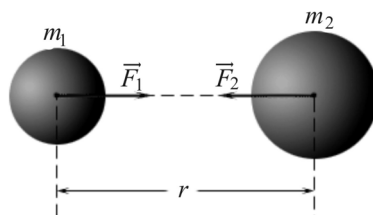


Рис. 1.10

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством *гравитационного поля (поля тяготения)*. Это поле наряду с другими полями и веществом является одной из форм материи.

С каждым телом неразрывно связано гравитационное поле, проявляющееся в том, что на помещенную в поле материальную точку действует гравитационная сила, пропорциональная массе этой точки.

Тело, гравитационное поле которого исследуется, называется источником этого поля.

Силовой характеристикой гравитационного поля является *напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения)* в данной точке пространства:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{тяг}}}{m}. \quad (1.37)$$

Закон всемирного тяготения справедлив также для однородных тел сферической формы радиусом  $R$  при  $r \geq R$  (расстояние  $r$  измеряется между центрами сфер (см. рис. 1.10)).

Примеры:

1. Ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты Земля:

$$g_0 = G \frac{m_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}}^2} \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

2. Ускорение свободного падения на высоте  $h$  над поверхностью планеты Земля:

$$g = g_0 \left( \frac{R_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}} + h} \right)^2.$$

Сила, действующая на тело массой  $m$  со стороны гравитационного поля в точке с напряженностью  $\vec{g}$ , называется *силой тяжести*:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}. \quad (1.38)$$

*Силы упругости* – силы, возникающие при упругой деформации тел.

*Деформация* называется *упругой*, если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние размеры и форма тела.

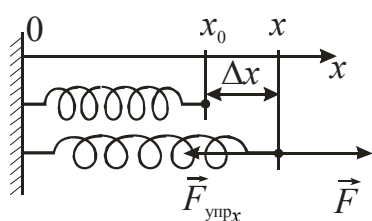


Рис. 1.11

Установленный экспериментально закон Гука утверждает, что *при упругой деформации удлинение образца пропорционально внешней силе* (рис. 1.11):

$$F_{\text{упр}x} = -k \Delta x, \quad (1.39)$$

где  $k$  – жесткость (коэффициент упругости) образца или пружины, Н/м;  $\Delta x$  – абсолютное удлинение образца (абсолютная деформация),  $\Delta x = x - x_0$ ,  $x_0$  – длина нерастянутого образца.



Сила реакции опоры  $\vec{R}$  (натяжения нити  $\vec{T}$ ) – сила, действующая на тело со стороны опоры (подвеса). При этом силу, с которой тело действует на опору или подвес, называют *весом*  $\vec{P}$  тела.

Силу реакции опоры  $\vec{R}$  чаще рассматривают как сумму двух сил: силы *нормальной реакции опоры*  $\vec{N}$ , направленной перпендикулярно поверхности опоры, и *силы трения*  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направленной вдоль этой поверхности (рис. 1.12):

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (1.40)$$

При контакте гладких поверхностей  $F_{\text{тр}} = 0$  и  $\vec{R} = \vec{N}$ . Для шероховатых поверхностей в простейшем случае формулируется закон сухого трения: *при скольжении модуль силы трения прямо пропорционален модулю силы нормальной реакции опоры*:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (1.41)$$

где  $\mu$  – безразмерный *коэффициент трения*, зависящий от типов соприкасающихся поверхностей.

В состоянии покоя модуль и направление силы трения заранее неизвестны, поэтому их находят из условий равновесия.

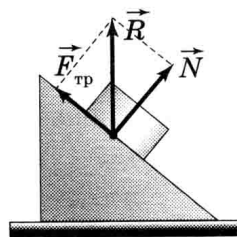


Рис. 1.12

### ***Первый закон Ньютона (закон инерции)***

Для описания движения вводится понятие системы отсчета. Систем отсчета бесчисленное множество. Законы механики в разных системах отсчета имеют различный вид, и может оказаться, что в произвольной системе отсчета законы даже совсем простых явлений будут весьма сложными. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Такая система отсчета наиболее удобна для описания механических явлений.

Рассмотрим возможные причины ускорения материальной точки относительно некоторой произвольной системы отсчета. Опыт показывает, что этой причиной могут быть как действие на данную точку ка-

ких-то определенных тел, так и свойства самой системы отсчета (относительно разных систем отсчета ускорение будет различным).

Можно предположить, что существует такая система отсчета, в которой ускорение материальной точки целиком обусловлено только взаимодействием ее с другими телами. Такие системы отсчета называются *инерциальными*. Свободная материальная точка (не подверженная действию никаких других тел) будет двигаться относительно инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно (или, как говорят, *по инерции*) или покоиться.

Утверждение, что *инерциальные системы отсчета существуют*, составляет содержание первого закона классической механики – закона инерции Ньютона, впервые установленного Галилео Галилеем.

Существование инерциальных систем отсчета подтверждается опытом, т.е. всегда можно найти такую систему отсчета, которую с наперед заданной точностью можно считать инерциальной.

Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, является также инерциальной. Таким образом, существует не одна, а бесчисленное множество инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называются *неинерциальными*.

Важной особенностью инерциальных систем отсчета является то, что по отношению к ним время и пространство обладают определенными *свойствами симметрии*. Опыт убеждает, что в этих системах отсчета время однородно, а пространство однородно и изотропно.

*Однородность времени* заключается в том, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Иначе говоря, различные моменты времени эквивалентны друг другу по своим физическим свойствам.

*Однородность пространства* заключается в том, что свойства пространства в различных точках одинаковы.

*Изотропность пространства* заключается в том, что свойства пространства в каждой точке одинаковы во всех направлениях.

## Принцип относительности Галилея

Все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Это означает, что никакими механическими опытами, проводимыми в данной инерциальной системе, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется.

*Во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики.* Этот принцип является обобщением опытных данных.

*Преобразованиями Галилея* называют формулы перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Пусть инерциальная система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{u}$  относительно другой инерциальной системы  $K$ . Выберем оси координат  $x', y', z'$  системы  $K'$  параллельно соответствующим осям  $x, y, z$  системы  $K$ , причем так, чтобы оси  $x'$  и  $x$  совпадали между собой и были направлены вдоль вектора  $\vec{u}$  (рис. 1.13). Взяв за начало отсчета момент времени, когда начала координат  $O'$  и  $O$  совпали, запишем соотношение между радиусами-векторами  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}$  одной и той же точки  $A$  в системах  $K'$  и  $K$ :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \quad (1.42)$$

при этом

$$t' = t. \quad (1.43)$$

Соотношения (1.42) и (1.43) представляют собой *преобразования Галилея*. В координатах эти преобразования имеют вид:

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.44)$$

Продифференцировав (1.42) по времени, найдем классический закон преобразования скорости точки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}, \quad (1.45)$$

где  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}'$  – скорости точки относительно систем отсчета  $K$  и  $K'$  соответственно.

Дифференцируя это выражение по времени с учетом того, что  $\vec{u} = \text{const}$ , получаем  $\vec{a}' = \vec{a}$ , т.е. ускорение точки одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

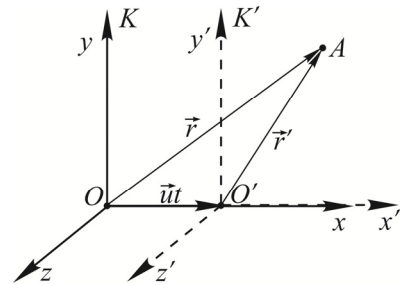


Рис. 1.13

## ***Второй закон Ньютона (основное уравнение механики)***

Понятия силы и массы вводятся безотносительно к движению, но опыт показывает, что всякое тело «оказывает сопротивление» (инертно) при любых попытках изменить его скорость как по модулю, так и по направлению.

Многочисленные эксперименты говорят о том, что *произведение массы точки на вектор ее ускорения равно силе, действующей на точку*:

$$m \vec{a} = \vec{F}. \quad (1.46)$$

С учетом (1.35) это же соотношение можно записать через импульс:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.47)$$

или

$$d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad (1.48)$$

где  $\vec{F} dt$  называется *импульсом силы*.

*Иначе, производная по времени импульса точки равна силе, действующей на точку, или изменение импульса точки равно импульсу силы.*

Последнее утверждение в точной формулировке изложено И. Ньютоном в 1687 году.

Соотношения (1.46) – (1.48) представляют собой различную математическую запись второго закона Ньютона.

Для решения задач полезно записать соотношение (1.46) в проекциях на координатные оси:

1) в декартовой ортогональной системе координат (см. рис. 1.2):

$$\begin{cases} m a_x = F_x; \\ m a_y = F_y; \\ m a_z = F_z; \end{cases} \quad (1.49)$$

2) в естественных осях (см. рис. 1.5):

$$\begin{cases} m a_\tau = F_\tau; \\ m a_n = F_n; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_\tau; \\ m \frac{v^2}{R} = F_n. \end{cases} \quad (1.50)$$

### Третий закон Ньютона

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению (см., например, рис. 1.10):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad F_{12} = F_{21}. \quad (1.51)$$

Действию всегда соответствует равное и противоположное противодействие; другими словами: действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны.

Пример. Вес тела  $\vec{P}$  и сила реакции опоры  $\vec{R}$  в соответствии с этим законом связаны следующим образом:  $\vec{P} = -\vec{R}$ ,  $P = R$ .

#### 1.2.2. Динамика системы

*Механическая система* – совокупность материальных точек или тел, движение которых связано между собой некоторым образом.

*Масса механической системы* – сумма масс материальных точек, из которых она состоит:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \equiv \sum_{i=1}^n m_i.$$

*Центр масс* механической системы  $\vec{r}_C$  – точка, однозначно связанная с системой, положение которой определяется следующим образом:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (1.52)$$

Координаты центра масс определяются по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}.$$

*Импульс системы* – сумма импульсов материальных точек, из которых она состоит:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (1.53)$$

Импульс системы можно выразить через *скорость центра масс*:

$$\vec{p} = m \vec{v}_C. \quad (1.54)$$

*Внешние силы*  $\vec{F}^{\text{внеш}}$  – силы, которые действуют на данную механическую систему со стороны других систем.

*Внутренние силы*  $\vec{F}^{\text{внутр}}$  – силы, которые действуют между материальными точками данной механической системы.

Свойство внутренних сил для абсолютно твердого тела следует из третьего закона Ньютона:

$$\sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внутр}} = 0.$$

Поэтому сумма всех сил, действующих на тела данной механической системы, равна сумме только внешних сил:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum \vec{F}^{\text{внутр}} = \sum \vec{F}^{\text{внеш}}.$$

### ***Закон изменения импульса системы***

*Производная по времени от импульса системы равна сумме всех внешних сил:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внеш}} \quad \text{или} \quad d\vec{p} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внеш}} dt. \quad (1.55)$$

Отсюда вытекают следствия:

- 1) если  $\sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внеш}} = 0$ , то  $\vec{p} = \overline{\text{const}}$ ;
- 2) если  $\sum_{j=1}^n F_{xj}^{\text{внеш}} = 0$ , то  $p_x = \text{const}$ .

Эти два следствия выражают законы сохранения импульса и проекции импульса.

Система называется *замкнутой*, если на нее не действуют внешние силы. По закону сохранения импульса *импульс замкнутой системы неизменен*.

### ***Уравнение движения центра масс системы***

*Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно сумме всех внешних сил:*

$$m\vec{a}_C = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внеш}}. \quad (1.56)$$

Отсюда вытекают следствия:

- 1) если  $\sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{внеш}} = 0$ , то  $\vec{v}_C = \overline{\text{const}}$ ;
- 2) если  $\sum_{j=1}^n F_{xj}^{\text{внеш}} = 0$ , то  $v_{Cx} = \text{const}$ ; если при этом проекция начальной скорости центра масс  $v_{Cx0} = 0$ , то и  $x_C = \text{const}$ .

### 1.2.3. Динамика вращательного движения

#### Динамические характеристики вращательного движения

В случае *плоской* системы сил моментом  $M_O$  силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называют скалярную (алгебраическую) величину, численно равную произведению силы  $F$  на плечо  $d$  (рис. 1.14):

$$M_O = \pm Fd, \quad (1.57)$$

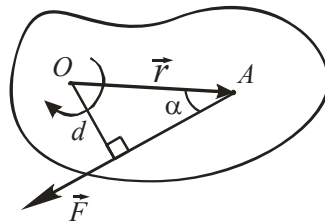


Рис. 1.14

где  $d$  – плечо силы (расстояние от точки  $O$  до линии действия силы),  $d = r \sin \alpha$ . Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае. Единицей измерения момента силы является *ньютон на метр*,  $[M] = \text{Н}\cdot\text{м}$ .

В случае *пространственной* системы сил момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  есть вектор  $\vec{M}_O$ , равный векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор силы (рис. 1.15):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.58)$$

Модуль момента силы

$$M_O(\vec{F}) = r F |\sin \alpha| = Fd, \quad \alpha = (\vec{r}, \vec{F}).$$

Момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  есть скалярная (алгебраическая) величина  $M_z$ , равная алгебраическому моменту вектора силы  $\vec{F}_{xy}$  в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  и плоскости  $xy$  (его можно рассматривать как проекцию вектора  $\vec{M}_O$  на ось  $z$ ) (см. рис. 1.15):

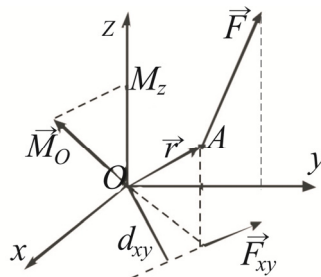


Рис. 1.15

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} d_{xy}, \quad (1.59)$$

где  $d_{xy}$  – расстояние от оси до линии действия силы  $\vec{F}_{xy}$  (плечо проекции силы).

Аналогичным образом вводятся *моменты импульса* материальной точки:

– относительно точки  $O$ :

$$\vec{L}_O(\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}; \quad (1.60)$$

– относительно оси:

$$L_z(\vec{p}) = \pm p_{xy} d_{xy} = \pm m v_{xy} d_{xy}, \quad [L] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}. \quad (1.61)$$

Направление моментов определяется по правилу *правого винта* (*буравчика*): поворот по кратчайшему расстоянию от направления  $\vec{r}$  к направлению  $\vec{F}$  (или  $\vec{p}$ ) вызывает поступательное перемещение винта в направлении вектора  $\vec{M}$  (или  $\vec{L}$ ).

*Момент инерции материальной точки* относительно оси  $z$  есть скалярная величина  $I_z$ , численно равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси:

$$I_z = m r^2, \quad [I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2. \quad (1.62)$$

Пример. Точка массой  $m = 1$  кг движется параллельно оси  $x$  со скоростью  $v = 1$  м/с, на нее действует сила  $F = 2$  Н, параллельная оси  $z$  (рис. 1.16).

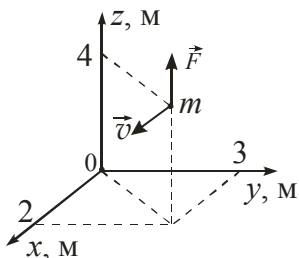


Рис. 1.16

Определим динамические характеристики вращательного движения этой материальной точки относительно осей координат:

$$L_x = 0; \quad L_y = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}; \quad L_z = -3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с};$$

$$M_x = 6 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_y = -4 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_z = 0;$$

$$I_x = 25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_y = 20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_z = 13 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции – величина аддитивная, поэтому *момент инерции тела* относительно оси  $z$  находится как сумма моментов инерции материальных точек, из которых состоит тело:

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1.63)$$

Для тел, обладающих элементами симметрии, моменты инерции  $I_{z_c}$  относительно оси, проходящей через центр масс, приведе-



ны на рис. 1.17; моменты инерции относительно других осей можно найти по теореме Штейнера.

### Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси  $z$  равен сумме момента инерции относительно параллельной ей оси  $z_c$ , проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_z = I_{z_c} + md^2. \quad (1.64)$$

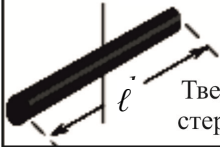





$I_{z_c} = \frac{1}{12} m\ell^2$  Твердый стержень	$I_{z_c} = \frac{2}{5} mR^2$  Шар	$I_{z_c} = \frac{2}{3} mR^2$  Тонкостенная сферическая оболочка
$I_{z_c} = mR^2$  Тонкостенный цилиндр	$I_{z_c} = \frac{1}{2} mR^2$  Диск	$I_{z_c} = \frac{1}{4} mR^2$  Диск

Рис. 1.17

Пример. Момент инерции стержня массой  $m$  и длиной  $\ell$  относительно оси, проходящей через центр масс,  $I_{z_c} = \frac{1}{12} m\ell^2$ .

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку  $A$  на конце стержня, можно найти по теореме Штейнера:

$$I_{z_A} = I_{z_c} + md^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2.$$

### Закон изменения момента импульса материальной точки

Производная по времени момента импульса материальной точки относительно точки или оси равна моменту силы относительно этой же точки или оси:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (1.65)$$

Отсюда вытекают следствия (законы сохранения момента импульса материальной точки):

- 1) если  $\vec{M}_O = 0$ , то  $\vec{L}_O = \text{const}$ ;
- 2) если  $M_z = 0$ , то  $L_z = \text{const}$ .

**Закон изменения момента импульса системы относительно точки и оси (уравнения моментов)**

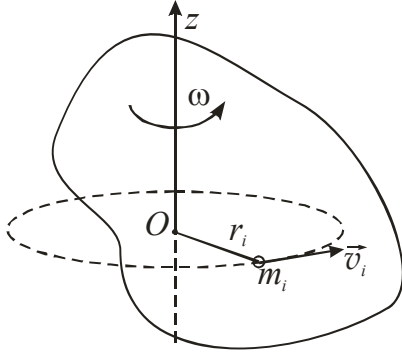


Рис. 1.18

Момент импульса тела и системы находится как сумма моментов импульсов материальных точек, из которых состоит тело или система:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{Oi}; \quad L_z = \sum_i L_{zi}. \quad (1.66)$$

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 1.18), с учетом того, что  $v_i = \omega r_i$ , момент импульса тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на его угловую скорость:

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i v_i r_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I_z \omega. \quad (1.67)$$

Производная по времени момента импульса системы относительно точки или оси равна сумме моментов всех внешних сил относительно этой же точки или оси:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{Oi}^{\text{внеш}}, \quad (1.68)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}}. \quad (1.69)$$

Отсюда вытекают следствия:

$$1) \text{ если } \sum_i \vec{M}_{Oi}^{\text{внеш}} = 0, \text{ то } \vec{L}_O = \text{const}; \quad (1.70)$$

$$2) \text{ если } \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}} = 0, \text{ то } L_z = \text{const}. \quad (1.71)$$

Соотношения (1.70) и (1.71) выражают законы сохранения момента импульса системы относительно точки и оси соответственно.

## Основной закон динамики вращательного движения

Из соотношений (1.69) и (1.67) получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}}.$$

*Произведение момента инерции тела относительно некоторой оси на его угловое ускорение равно сумме моментов всех внешних сил относительно этой же оси:*

$$I_z \varepsilon = \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}}. \quad (1.72)$$

Следствие из этого закона (*условие равномерного вращения*):

$$\text{если } \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}} = 0, \text{ то } \varepsilon = 0 \text{ и } \omega = \text{const}. \quad (1.73)$$

### 1.2.4. Работа, мощность, энергия

Элементарной работой  $dA$  силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется скалярная (алгебраическая) величина, численно равная скалярному произведению векторов силы и перемещения (рис. 1.19):

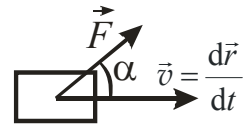


Рис. 1.19

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F |d\vec{r}| \cos \alpha = F ds \cos \alpha = F_\tau ds. \quad (1.74)$$

В декартовой ортогональной системе координат:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.75)$$

Единица измерения работы – джоуль,  $[A] = \text{Дж}$ .

При вращательном движении (рис. 1.20)

$$dA = M_z d\varphi. \quad (1.76)$$

На конечном перемещении из положения 1 в положение 2 работа

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds. \quad (1.77)$$

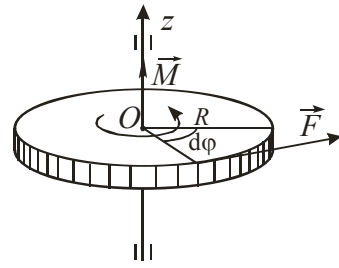


Рис. 1.20

Геометрический смысл этого интеграла – площадь криволинейной трапеции (рис. 1.21).

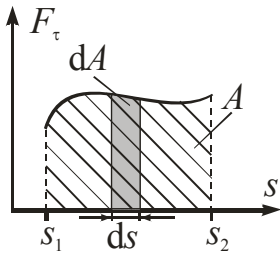


Рис. 1.21

При вращательном движении

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (1.78)$$

Мощность  $N$  некоторой силы – работа, совершаемая этой силой в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (1.79)$$

Единица мощности – *ватт*,  $[N] = \text{Вт}$ .

При поступательном движении

$$N = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha = F_\tau v. \quad (1.80)$$

При вращательном движении

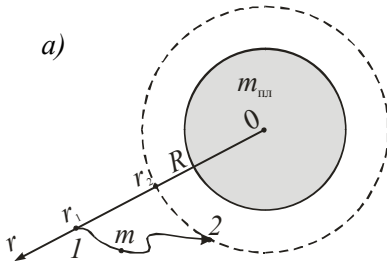
$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega. \quad (1.81)$$

Примеры:

1. Работа силы тяжести при перемещении тела массой  $m$  в поле силы тяжести планеты массой  $m_{\text{пл}}$  из точки 1 в точку 2:

а) на космических расстояниях (рис. 1.22, а)

$$A_{12} = G \frac{m m_{\text{пл}}}{r_2} - G \frac{m m_{\text{пл}}}{r_1}; \quad (1.82)$$



б) вблизи поверхности планеты (рис. 1.22, б):

$$A_{12} = mgy_1 - mgy_2 = \pm mgh. \quad (1.82a)$$

2. Работа силы упругости при изменении деформации пружины от  $\Delta x_1$  до  $\Delta x_2$

$$A_{12} = \frac{k\Delta x_1^2}{2} - \frac{k\Delta x_2^2}{2}. \quad (1.83)$$

3. Работа силы трения скольжения

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s. \quad (1.84)$$

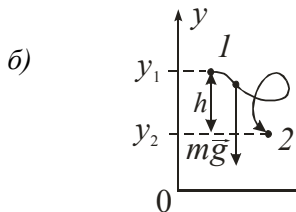


Рис. 1.22

*Потенциальными (консервативными)* называются силы, работа которых зависит только от начального и конечного положения перемещающегося в пространстве тела и не зависит от формы траектории. При замкнутой траектории работа потенциальной силы всегда равна нулю. Примерами потенциальных сил являются силы тяжести и упругости.

Силы, работа которых зависит от формы траектории, называются *непотенциальными*. Примерами непотенциальных сил являются силы трения и сопротивления.

Система тел называется *консервативной*, если внутренние и внешние силы, действующие на тела системы, являются потенциальными, иначе система называется *неконсервативной (диссипативной)*.

*Энергия* – единая мера различных форм движения материи и мера перехода движения материи из одних форм в другие.

Для характеристики различных форм движения материи вводятся соответствующие виды энергии, например: механическая, внутренняя, энергия электростатических, внутриядерных взаимодействий и др.

Энергия подчиняется закону сохранения, который является одним из важнейших законов природы.

*Механическая энергия  $W$*  – сумма кинетической  $W_k$  и потенциальной  $W_p$ :

$$W = W_k + W_p. \quad (1.85)$$

*Кинетическая энергия  $W_k$*  материальной точки или тела является мерой механического движения, зависящей от скоростей их движения в данной инерциальной системе отсчета,

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.86)$$

*Кинетическая энергия системы* – сумма кинетических энергий тел системы:

$$W_k = \sum_i W_{ki}. \quad (1.87)$$

*Кинетическая энергия вращающегося тела*

$$W_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (1.88)$$

*Изменение кинетической энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно работе всех сил, действующих на систему:*

$$A_{\text{всех сил}} = W_{\text{к}}^{\text{кон}} - W_{\text{к}}^{\text{нач}}. \quad (1.89)$$

*Потенциальной энергией  $W_{\text{п}}$  называется часть механической энергии, зависящая от конфигурации системы, т.е. от взаимного расположения ее частей и их положения во внешнем силовом поле.*

Потенциальная энергия зависит от относительного расположения взаимодействующих материальных точек и относится ко всей совокупности взаимодействующих объектов. Поэтому ее называют взаимной потенциальной энергией. Говоря о потенциальной энергии одной точки, всегда имеют в виду и другие, с которыми она взаимодействует.

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы, поскольку физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а ее изменение при переходе из одного состояния в другое.

Мерой изменения потенциальной энергии системы при ее переходе из одного состояния в другое является работа потенциальных сил, осуществляющих взаимодействие между элементами системы. При этом *работа потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии:*

$$A_{\text{п.сил}} = W_{\text{п}}^{\text{нач}} - W_{\text{п}}^{\text{кон}}. \quad (1.90)$$

Учитывая соотношения (1.82) и (1.82а) для работы потенциальных сил, напишем выражения для потенциальной энергии в поле соответствующих сил:

1. Потенциальная энергия:

а) взаимодействия тел массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга (см. рис. 1.22, а),

$$W_{\text{п}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}; \quad (1.91)$$

б) тела массой  $m$  в поле силы тяжести, находящегося в точке с координатой  $y$  вблизи поверхности планеты (см. рис. 1.22, б),

$$W_{\text{п}} = mgy. \quad (1.92)$$

2. Потенциальная энергия упруго сжатой или растянутой пружины (см. рис. 1.11)

$$W_{\Pi} = \frac{k\Delta x^2}{2}. \quad (1.93)$$

Работу всех сил можно представить как сумму работ потенциальных сил и сил трения (сопротивления):  $A_{\text{всех сил}} = A_{\text{п.сил}} + A_{\text{тр}}$ .

С учетом (1.89), (1.90):

$$W_{\text{к}}^{\text{кон}} - W_{\text{к}}^{\text{нач}} = W_{\text{п}}^{\text{нач}} - W_{\text{п}}^{\text{кон}} + A_{\text{тр}},$$

или

$$(W_{\text{к}}^{\text{кон}} + W_{\text{п}}^{\text{кон}}) - (W_{\text{к}}^{\text{нач}} + W_{\text{п}}^{\text{нач}}) = A_{\text{тр}}.$$

Приходим к закону изменения механической энергии: *изменение механической энергии равно работе сил трения (сопротивления),*

$$W_{\text{к}}^{\text{кон}} - W_{\text{к}}^{\text{нач}} = A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s < 0. \quad (1.94)$$

Если система консервативна (нет сил трения), то  $A_{\text{тр}} = 0$ .

Закон сохранения механической энергии: *механическая энергия консервативной системы сохраняется постоянной в процессе движения системы,*

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}. \quad (1.95)$$

Если система неконсервативна, то в ней происходит *диссипация* (рассеивание) механической энергии, переход ее в другие виды.

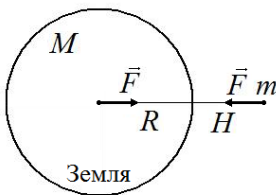
В динамике поступательного и вращательного движений существуют следующие аналогии:

Поступательное движение		Вращательное движение	
Физические величины			
Масса	$m$ , кг	Момент инерции	$I_z$ , кг·м <sup>2</sup>
Сила	$\vec{F}$ , $F_x$ , Н	Момент силы	$\vec{M}_O$ , $M_z$ , Н·м
Импульс	$\vec{p}$ , $p_x$ , кг·м/с	Момент импульса	$\vec{L}_O$ , $L_z$ , кг·м <sup>2</sup> /с
Законы изменения для системы			
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}}$		$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O_i}^{\text{внеш}}$	
$\frac{dp_x}{dt} = \sum_i F_{ix}^{\text{внеш}}$		$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}}$	

Поступательное движение	Вращательное движение
Основное уравнение для тела	
$ma_{Cx} = \sum_i F_{ix}^{\text{внеш}}$	$I_z \varepsilon = \sum_i M_{zi}^{\text{внеш}}$
Работа, Дж	
$\Delta A = F_{\tau} \Delta s$	$\Delta A = M_z \Delta \varphi$
Мощность, Вт	
$N = F_{\tau} v$	$N = M_z \omega$
Кинетическая энергия, Дж	
$W_k = \frac{mv^2}{2}$	$W_k = \frac{I_z \omega^2}{2}$

### Примеры решения задач

**№ 1.** На каком расстоянии от поверхности Земли сила гравитационного притяжения, действующая на тело, в два раза меньше, чем у поверхности Земли? Радиус Земли 6,4 Мм.



**Решение.** По закону всемирного тяготения  $F = G \frac{Mm}{r^2}$ , где  $M$  и  $m$  – массы Земли и тела;  $r$  – расстояние от центра Земли до тела,  $r = R + H$ ;  $R$  – радиус Земли;  $H$  – высота тела над поверхностью. Сила притяжения у поверхности  $F_{\text{пов}} = \frac{GMm}{R^2}$ , на высоте  $F_{\text{выс}} = \frac{GMm}{r^2}$ .

По условию  $\frac{F_{\text{пов}}}{F_{\text{выс}}} = 2$ , следовательно,  $\frac{F_{\text{пов}}}{F_{\text{выс}}} = \frac{GMm}{R^2} \cdot \frac{r^2}{GMm} =$

$$= \frac{(R+H)^2}{R^2} = 2.$$

Отсюда:

$$(R+H)^2 = 2R^2 \Rightarrow R+H = \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = R \cdot (\sqrt{2} - 1) = 6,4 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2,65 \text{ Мм.}$$

**№ 2.** Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться по круговой орбите на высоте 600 км над поверхностью Земли? Радиус Земли 6400 км.



Д а н о:  $R = 6400$  км;  $H = 600$  км;  $M$  и  $m$  – массы Земли и спутника.

Р е ш е н и е. По второму закону Ньютона  $ma_n = F$ , где  $F$  – сила всемирного тяготения,

$$F = G \frac{Mm}{r^2}; a_n \text{ – нормальное (центростремительное)}$$

ускорение,  $a_n = \frac{v^2}{r}$ ;  $r$  – радиус орбиты,

$$r = R + H.$$

$$\text{Тогда } m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R + H}.$$

$$\text{Ускорение свободного падения у поверхности Земли } g_0 = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GM = g_0 R^2, \text{ где } g_0 \approx 10 \text{ м/с}^2. \text{ Следовательно, } v^2 = \frac{g_0 R^2}{R + H}, \text{ откуда}$$

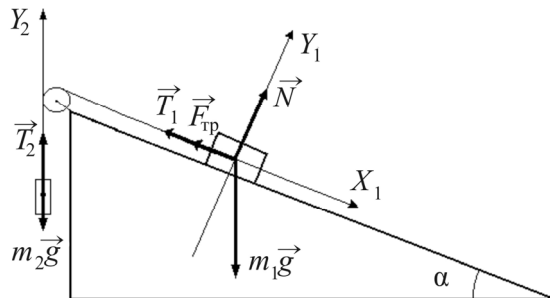
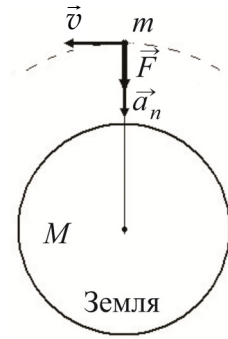
$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R + H}} = 6,4 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{10}{(6,4 + 0,6) \cdot 10^6}} = 6,4 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{10}{7}} = 7,65 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

**№ 3.** Груз массой 5 кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, с другим грузом массой 2 кг, движется вниз по наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити и ускорение грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью 0,1. Угол наклона плоскости к горизонту  $36^\circ$ . Массами блока и нитей, а также трением в блоке пренебречь.

Д а н о:  $m_1 = 5$  кг;  $m_2 = 2$  кг;  $\mu = 0,1$ ;  $\alpha = 36^\circ$ .

Р е ш е н и е. Рассмотрим движение каждого груза отдельно. Систему отсчета для каждого из грузов выберем свою. Для второго груза достаточно одной оси  $Y_2$ , так как он движется вертикально.

На первый груз действуют:  $m_1 \vec{g}$  – сила тяжести,  $\vec{N}$  – сила нормальной реакции наклонной плоскости,  $\vec{T}_1$  – сила натяжения нити,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила трения (см. рисунок). По второму закону Ньютона



$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = m_1 \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Проектируя это уравнение на выбранные оси  $X_1$  и  $Y_1$ , получим:

$$\begin{cases} m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - T_1 - F_{\text{тр}}, & (*) \\ 0 = -m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha + N. & (**) \end{cases}$$

Из (\*\*) находим, что  $N = m_1 g \cdot \cos \alpha$ , и с учетом того, что  $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$ , перепишем (\*) иначе:

$$m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - T_1 - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha. \quad (***)$$

На второй груз действуют:  $m_2 \vec{g}$  – сила тяжести,  $\vec{T}_2$  – сила натяжения нити. По второму закону Ньютона

$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = m_2 \cdot \vec{g} + \vec{T}_2,$$

или в проекции на ось  $Y_2$ :

$$m_2 \cdot a_2 = T_2 - m_2 \cdot g. \quad (****)$$

Из условия нерастяжимости нити следует, что, во-первых, оба груза будут двигаться с одинаковым по модулю ускорением, т.е.  $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ ; во-вторых, сила натяжения в любой точке нити будет одинакова, т.е.  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ . Тогда, решая совместно уравнения (\*\*\*) и (\*\*\*\*):

$$\begin{cases} m_1 \cdot a = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - T - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha, \\ m_2 \cdot a = T - m_2 \cdot g, \end{cases}$$

находим:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{5 \cdot 10 \cdot (0,59 - 0,1 \cdot 0,81) - 2 \cdot 10}{5 + 2} \approx 0,78 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$T = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g = 2 \cdot (10 + 0,77) \approx 21,5 \text{ Н.}$$

**№ 4.** Автомобиль массой 1 т движется со скоростью 36 км/ч по выпуклому мосту. Траектория движения автомобиля является дугой окружности радиусом 50 м. Определите вес автомобиля в верхней точке моста.

Д а н о:  $m = 1000$  кг;  $R = 50$  м;  $v = 36$  км/ч =  
 $= 10$  м/с.

Р е ш е н и е. Согласно третьему закону Ньютона вес  $\vec{P} = -\vec{N} \Rightarrow P = N$ . По второму закону Ньютона для автомобиля  $m \cdot \vec{a} = \vec{N} + m \cdot \vec{g}$ , или в проекции на ось  $Y$ :

$$m \cdot a_n = -N + m \cdot g \Rightarrow N = m \cdot (g - a_n).$$

Нормальное (центростремительное) ускорение  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Тогда вес автомобиля

$$P = m \cdot \left( g - \frac{v^2}{R} \right) = 1000 \left( 10 - \frac{100}{50} \right) = 8000 = 8 \text{ кН.}$$

**№ 5.** Два шарика массами 6 и 4 кг движутся со скоростями  $v_1 = 7$  м/с и  $v_2 = 5$  м/с. Определите скорости шаров после центрального абсолютно упругого и неупругого ударов в случаях: 1) когда больший шар догоняет меньший; 2) когда шары движутся навстречу друг другу.

Р е ш е н и е.

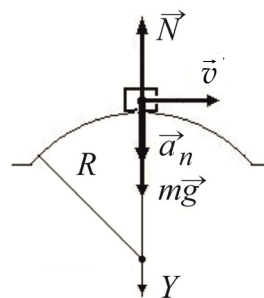
*Удар* – это значительное изменение скоростей тел за очень малый промежуток времени их столкновения. При соударениях тела деформируются. Поскольку время соударения мало, импульсом внешних сил можно пренебречь, поэтому при соударениях выполняется закон сохранения импульса системы соударяющихся тел.

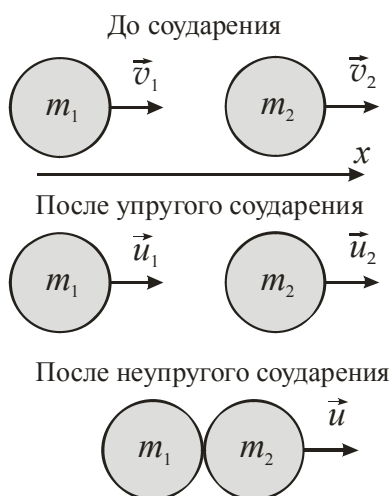
*При абсолютно упругом ударе* силы взаимодействия соударяющихся тел потенциальны. В результате такого взаимодействия механическая энергия системы не изменяется.

*При абсолютно неупругом ударе* между телами действуют непотенциальные силы, и после такого удара тела, как правило, движутся как единое целое с общей скоростью.

Удар называется *центральный*, если скорости тел до удара направлены вдоль линии, соединяющей центры масс тел.

Для центрального абсолютно упругого удара двух шаров выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:





$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \end{cases}$$

где  $v_{1x}$ ,  $v_{2x}$ ,  $u_{1x}$ ,  $u_{2x}$  – проекции скоростей шаров на ось  $x$ . Решив систему, можно получить проекции скоростей шаров после столкновения:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}.$$

В случае, когда больший шар догоняет меньший,  $v_{1x} = 7$  м/с и  $v_{2x} = 5$  м/с. Тогда:

$$u_{1x} = \frac{(6-4) \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 5}{10} = 5,4 \text{ м/с}, \quad u_{2x} = \frac{(4-6) \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7}{10} = 6,4 \text{ м/с}.$$

В случае, когда шары движутся навстречу друг другу,  $v_{1x} = 7$  м/с и  $v_{2x} = -5$  м/с, поэтому:

$$u_{1x} = \frac{(6-4) \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 5}{10} = -2,6 \text{ м/с}, \quad u_{2x} = \frac{-(4-6) \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7}{10} = 10,4 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» означает, что вектор скорости направлен против оси координат.

При центральном абсолютно неупругом ударе двух шаров выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x,$$

т.е. шары движутся как единое целое со скоростью

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Изменение механической энергии системы двух шаров

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_{к2} - W_{к1} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 < 0. \end{aligned}$$

В случае, когда больший шар догоняет меньший,  $v_{1x} = 7$  м/с и  $v_{2x} = 5$  м/с.

Тогда

$$u_x = \frac{6 \cdot 7 + 4 \cdot 5}{10} = 6,2 \text{ м/с.}$$

В случае, когда шары движутся навстречу друг другу,  $v_{1x} = 7$  м/с и  $v_{2x} = -5$  м/с, поэтому

$$u_x = \frac{6 \cdot 7 - 4 \cdot 5}{10} = 2,2 \text{ м/с.}$$

**№ 6.** Железнодорожный вагон массой 20 т надвигается на упор со скоростью 0,2 м/с. Обе буферные пружины вагона сжимаются, каждая на 4 см. Определите максимальное значение силы, действующей на каждую пружину.

Д а н о:  $m = 20 \cdot 10^3$  кг;  $v = 0,2$  м/с,  $x = 0,04$  м.

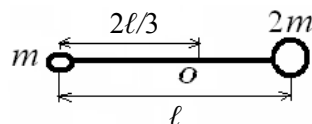
Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии  $\frac{mv^2}{2} = 2 \frac{kx^2}{2}$ ,

где  $k$  – жесткость одной пружины,  $k = \frac{mv^2}{2x^2}$ .

Сила, действующая на одну пружину, согласно третьему закону Ньютона равна силе упругости (закон Гука):

$$F = F_{\text{упр}} = kx = \frac{mv^2}{2x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,2^2}{2 \cdot 0,04} = 10 \cdot 10^3 = 10 \text{ кН.}$$

**№ 7.** На концах однородного тонкого стержня длиной 1 м и массой  $3m$  прикреплены маленькие шарики массами  $m$  и  $2m$ .



Определите момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку  $O$ , лежащую на оси стержня. Принять  $m = 0,1$  кг.

Р е ш е н и е. Полный момент инерции системы  $I = I_{\text{ст}} + I_1 + I_2$ .

Момент инерции стержня  $I_{\text{ст}}$  находим по теореме Штейнера:

$$I_{\text{ст}} = I_{z_c} + m_{\text{ст}} d^2,$$

где  $I_{z_c}$  – момент инерции стержня относительно оси, проходящей

через его центр масс (см. рис. 1.17),  $I_{z_c} = \frac{1}{12} m_{\text{ст}} \ell^2$ ;  $d$  – расстояние

между осями,  $d = \frac{2\ell}{3} - \frac{\ell}{2} = \frac{4\ell - 3\ell}{6} = \frac{\ell}{6}$ . Тогда:

– момент инерции стержня массой  $3m$

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{12} \cdot 3m\ell^2 + 3m \left( \frac{\ell}{6} \right)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2;$$

– момент инерции точечной массы  $m$

$$I_1 = m \cdot \left( \frac{2\ell}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} m\ell^2;$$

– момент инерции точечной массы  $2m$

$$I_2 = 2m \cdot \left( \frac{\ell}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} m\ell^2;$$

– момент инерции всей системы

$$I = \frac{3}{9} m\ell^2 + \frac{4}{9} m\ell^2 + \frac{2}{9} m\ell^2 = m\ell^2 = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

**№ 8.** Маховое колесо, имеющее момент инерции  $245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , вращается, делая  $20 \text{ об/с}$ . Через минуту после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найдите: 1) момент сил трения; 2) число  $N$  оборотов колеса до полной остановки.

Д а н о:  $I = 245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $v_0 = 20 \text{ об/с}$ ;  $v = 0 \text{ об/с}$ ;  $t = 60 \text{ с}$ .

Р е ш е н и е. По основному закону динамики вращательного движения

$$I \cdot \varepsilon = M_{\text{тр}}.$$

Записываем его в скалярной форме, так как на колесо действует момент одной силы трения и  $\vec{\varepsilon}$  направлен в сторону  $\vec{M}_{\text{тр}}$ . Далее

находим:  $M_{\text{тр}} = I \cdot \frac{\omega - \omega_0}{t}$ , где  $\omega_0 = 2\pi \cdot v_0$ ,  $\omega = 0 \text{ рад/с}$ . Отсюда

$$M_{\text{тр}} = 245 \cdot \frac{2\pi \cdot 20}{60} \approx 513 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для нахождения числа оборотов запишем кинематические уравнения движения:  $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ .

Учтем, что  $\omega = 0$ ,  $\varphi = 0$ , и, подставив  $\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}$  в уравнение  $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ , получим:

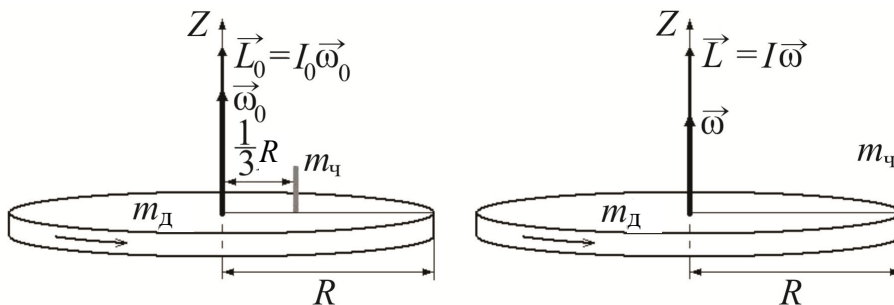
$$\varphi = \frac{1}{2} \omega_0 t.$$

Учтем, что  $\varphi = 2\pi N \Rightarrow 2\pi N = \frac{1}{2} 2\pi v_0 t$ , окончательно получим:

$$N = \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} 20 \cdot 60 = 600 \text{ об.}$$

**№ 9.** Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 0,5 об/с. Человек массой 60 кг стоит на расстоянии  $R/3$  от центра платформы. Сколько оборотов в секунду будет делать платформа, если расстояние от человека до центра станет равным  $R$ ? Платформа – однородный диск радиусом  $R$ , человек – точечная масса.

Д а н о:  $m_{\text{д}} = 100$  кг;  $m_{\text{ч}} = 60$  кг;  $v_0 = 0,5$  об/с;  $r_0 = R/3$ ;  $r = R$ .



**Р е ш е н и е.** Поскольку система является замкнутой, в ней выполняется закон сохранения момента импульса. В проекциях на ось  $Z$

$$I_0 \omega_0 = I \omega \text{ или } (I_{\text{д}} + I_{\text{ч}0}) \omega_0 = (I_{\text{д}} + I_{\text{ч}}) \omega.$$

Подставим в это выражение следующие величины:

$$I_{\text{д}} = \frac{1}{2} m_{\text{д}} R^2, \quad I_{\text{ч}} = m_{\text{ч}} r^2 \text{ (см. рис. 1.17), } \omega_0 = 2\pi \cdot v_0, \quad \omega = 2\pi \cdot v.$$

Получим:

$$\left( \frac{1}{2} m_d R^2 + m_q \left( \frac{R}{3} \right)^2 \right) \cdot 2\pi v_0 = \left( \frac{1}{2} m_d R^2 + m_q R^2 \right) \cdot 2\pi v.$$

Наконец, сократив, получим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} m_d + \frac{1}{9} m_q \right) \cdot v_0 &= \left( \frac{1}{2} m_d + m_q \right) \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= v_0 \cdot \frac{(9m_d + 2m_q)}{9 \cdot (m_d + 2m_q)} = 0,5 \cdot \frac{900 + 120}{9 \cdot (100 + 120)} = 0,26 \text{ об/с.} \end{aligned}$$

**№ 10.** Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого  $I = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , вращаясь при торможении равнозамедленно, за 1 мин уменьшил частоту своего вращения с 240 до 120 об/мин. Определите работу сил торможения.

Д а н о:  $I = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $v_0 = 240 \text{ об/мин} = 4 \text{ об/с}$ ;  $v = 2 \text{ об/с}$ .

Р е ш е н и е. Работа сил торможения равна убыли полной механической энергии тела:  $A = \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2}$ . Механическая энергия в данном случае равна кинетической энергии вращающегося диска. Подставив в это выражение величины  $\omega_0 = 2\pi \cdot v_0$ ,  $\omega = 2\pi \cdot v$ , получим:

$$A = \frac{I \cdot 4\pi^2 v_0^2}{2} - \frac{I \cdot 4\pi^2 v^2}{2} = 2\pi^2 I (v_0^2 - v^2) = 2\pi^2 \cdot 1,5 \cdot (16 - 4) = 355 \text{ Дж.}$$

### 1.3. Колебательное движение

#### 1.3.1. Характеристики колебаний

*Колебания (колебательное движение)* – это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени, например механические колебания тела, подвешенного на пружине, качание маятников, колебания струны, вибрации, электромагнитные колебания и др.

Разнообразные по природе, колебания могут иметь общие закономерности и описываться однотипными математическими методами.

*Периодические колебания* – колебания, при которых значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени, например положение



маятника в часах, абсолютное значение силы тока в сети переменного тока.

*Периодом колебаний*  $T$  называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение,  $[T] = \text{с}$ .

*Частота*  $\nu$  – число колебаний в единицу времени. Единица измерения частоты – *герц*,  $[\nu] = \text{Гц}$ . Частота – величина, обратная периоду:  $\nu = \frac{1}{T}$ .

*Циклическая (круговая) частота*  $\omega_0$  – число колебаний за  $2\pi$  единиц времени,  $\omega_0 = 2\pi\nu$ ,  $[\omega] = \text{рад/с}$ .

Частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания* – колебания, совершающиеся по закону синуса или косинуса.

Если некоторая материальная точка совершает гармоническое колебательное движение около положения равновесия вдоль некоторой оси  $x$ , то ее координата меняется по закону:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где  $x$  – координата материальной точки, *смещение* из положения равновесия;  $A$  – амплитуда колебаний, максимальное отклонение от положения равновесия,  $A = x_{\text{max}}$ ;  $\varphi$  – фаза колебаний,  $\varphi = \omega_0 t + \alpha$ ;  $\alpha$  – начальная фаза. Значения величин  $A$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий в каждом конкретном случае. Циклическая частота  $\omega_0$  является характеристикой колебательной системы.

Система, совершающая гармонические колебания около положения равновесия, называется *гармоническим осциллятором*.

Простейшей *моделью гармонического колебания* является колебание проекции  $x$  конца радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки, движущейся по окружности радиусом  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 1.23). Такое представление гармонических колебаний называют *векторной диаграммой*.

Угол поворота изменяется по закону равномерного вращения:  $\varphi = \omega_0 t + \alpha$ . Проекция же конца радиуса-вектора точки изменяется по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.96)$$

Колебания бывают свободными и вынужденными, затухающими и незатухающими.

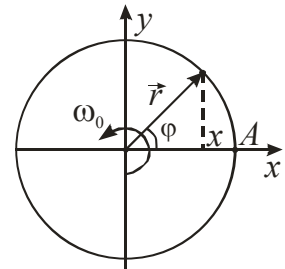


Рис. 1.23

*Свободными* называются такие колебания, которые происходят в системе, не подверженной действию переменных внешних сил. Примером могут служить колебания маятника, однократно выведенного из положения равновесия.

Если система консервативна, то в ней не происходит рассеяния энергии (диссипации).

*Незатухающие колебания* – колебания, происходящие в консервативной системе.

При гармонических колебаниях *скорость*

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = v_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.97)$$

где  $A\omega_0 = v_{\max}$  – амплитуда скорости. Из сравнения (1.96) и (1.97) следует, что скорость опережает смещение по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 1.24).

*Ускорение*

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x = a_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi), \quad (1.98)$$

где  $A\omega_0^2 = a_{\max}$  – амплитуда ускорения. Из сравнения (1.96) и (1.98) следует, что ускорение опережает смещение по фазе на  $\pi$ , т.е. ускорение и смещение меняются в противофазе (см. рис. 1.24).

Из уравнения (1.98) также видно, что  $a_x = -\omega_0^2 x$ , или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.99)$$

Соотношение (1.99) называют *дифференциальным уравнением колебаний* (свободных незатухающих). Функция (1.96) является решением этого уравнения.

Определим силу, под действием которой происходят гармонические колебания тела массой  $m$  вдоль оси  $x$ . По второму закону Ньютона с учетом (1.98)

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x = -kx. \quad (1.100)$$

Силы типа (1.100), пропорциональные смещению тела из положения рав-

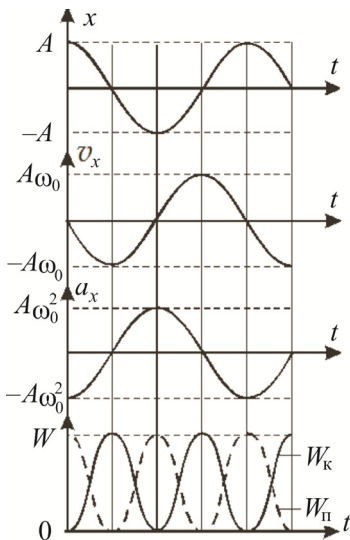


Рис. 1.24

новесия, независимо от их природы, называют *квазиупругими*. Коэффициент пропорциональности  $k = m\omega_0^2$  называют коэффициентом квазиупругой силы. Под действием квазиупругой силы типа (1.100) тело будет совершать гармонические колебания по закону (1.96).

Квазиупругая сила обуславливает наличие у тела потенциальной энергии:

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.101)$$

Колеблющееся тело обладает также кинетической энергией:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.102)$$

Механическая энергия (*энергия колебаний*) (см. рис. 1.24)

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (1.103)$$

### 1.3.2. Маятники

*Маятник* – твердое тело, способное совершать колебания вдоль или вокруг некоторой неподвижной оси.

*Пружинный маятник* – тело, прикрепленное к пружине и способное совершать колебания вдоль некоторой оси.

Если такой маятник находится в поле силы тяжести, то в положении равновесия удлинение пружины отлично от нуля:  $\Delta x = \delta$  (рис. 1.25), сила тяжести уравновешивается силой упругости:

$$mg = k\delta. \quad (1.104)$$

По второму закону Ньютона для маятника, отклоненного от положения равновесия, с учетом (1.104):

$$ma_x = mg + F_{\text{упр},x} = mg - k(x + \delta) = -kx.$$



Рис. 1.25

Учитывая, что  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ , приходим к дифференциальному уравнению колебаний пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.105)$$

Получено уравнение типа (1.99), где  $k/m = \omega_0^2$ .

Отсюда циклическая частота колебаний пружинного маятника (собственная частота колебаний)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.106)$$

Решением уравнения (1.105) является функция (1.96).

Период колебаний пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.107)$$

*Математический маятник* – идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешено тело, масса которого сосредоточена в одной точке и которое может совершать колебания под действием силы тяжести.

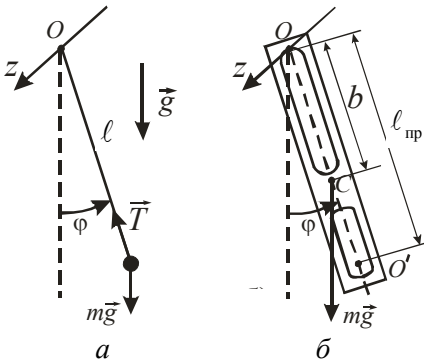


Рис. 1.26

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити (рис. 1.26, а).

Момент инерции шарика массой  $m$ , подвешенного на нити длиной  $l$ , относительно горизонтальной оси  $z$ , проходящей через точку подвеса,  $I_z = ml^2$ .

Отклонение маятника от положения равновесия (при колебаниях вокруг горизонтальной оси  $z$ ) будем характеризовать углом  $\varphi$ , образованным нитью с вертикалью. Возникающий при этом момент силы тяжести стремится вернуть систему в положение равновесия (его действие аналогично действию квазиупругой силы (1.100)):  $M_z = -mg\ell \sin \varphi$ , где  $\ell \sin \varphi$  – плечо силы тяжести.

Применим основное уравнение динамики вращательного движения (1.72) для маятника, отклоненного от положения равновесия (см. рис. 1.26, а):  $I_z \varepsilon = \sum M_z$ , или  $m\ell^2 \varepsilon = -mg\ell \sin \varphi$ . Ограничившись рассмотрением малых колебаний, можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ . С учетом того, что  $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ , приходим к дифференциальному уравнению колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0. \quad (1.108)$$

Получено уравнение типа (1.99) относительно угла поворота (углового смещения):

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (1.109)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ .

Отсюда циклическая частота колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (1.110)$$

Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (1.111)$$

Решением уравнения (1.109) является функция

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.112)$$

где  $\varphi_{\max}$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий.

*Физический маятник* – твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания вокруг неподвижной оси, не проходящей через его центр масс (рис. 1.26, б).

Применим основное уравнение динамики вращательного движения (1.72) для маятника, отклоненного от положения равновесия:

$$I_z \varepsilon = -mgb \sin \varphi,$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно горизонтальной оси  $z$ , проходящей через точку подвеса;  $b$  – расстояние от точки подвеса до центра масс;  $b\sin\varphi$  – плечо силы тяжести.

Рассматривая только малые отклонения ( $\sin\varphi \approx \varphi$ ), приходим к дифференциальному уравнению колебаний физического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgb}{I_z}\varphi = 0. \quad (1.113)$$

Получено уравнение типа (1.109) относительно угла поворота (углового смещения), решением которого является функция (1.112). При этом циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{I_z}}. \quad (1.114)$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgb}}. \quad (1.115)$$

Из сопоставления формул (1.111) и (1.115) получается, что математический маятник с длиной нити

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{I_z}{mb} \quad (1.116)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину  $\ell_{\text{пр}}$  называют приведенной длиной физического маятника. Таким образом, *приведенная длина физического маятника*  $\ell_{\text{пр}}$  – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, удаленная на расстояние приведенной длины от оси вращения, называется *центром качания* физического маятника (точка  $O'$  на рис. 1.26, б).

По теореме Штейнера момент инерции маятника  $I_z$  может быть представлен в виде

$$I_z = I_{z_c} + mb^2, \quad (1.117)$$

где  $I_{z_c}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси вращения  $z$ ;  $b$  – расстояние между осями.

Подставив (1.110) в (1.109), получаем:

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{I_{z_c}}{mb} + b, \quad (1.118)$$

откуда следует, что  $\ell_{\text{пр}} > b$ , так что точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра масс.

### 1.3.3. Сложение колебаний

#### *Сложение колебаний одинакового направления и одной частоты*

На практике часто приходится иметь дело с таким движением, при котором тело участвует одновременно в двух или нескольких колебаниях. Например, если груз подвешен на пружине к потолку вагона, то груз совершает колебания относительно точки подвеса, которая, в свою очередь, колеблется на рессорах вагона. Таким образом, груз совершает движение, складывающееся из двух колебаний одного направления.

Пусть тело участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одной частоты  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.119)$$

Представим оба колебания с помощью векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на векторной диаграмме (рис. 1.27). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $\vec{A}$ . Проекция этого вектора на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов:  $x = x_1 + x_2$ .

Следовательно, вектор  $\vec{A}$  представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью  $\omega_0$ , что

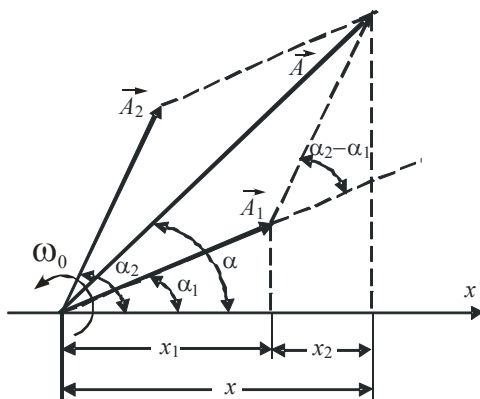


Рис. 1.27

и векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\alpha$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.120)$$

Из построения можно получить:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1); \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Проанализируем выражение (1.121) для амплитуды:

1) если разность фаз обоих колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , то амплитуда результирующего колебания  $A = A_1 + A_2$ ;

2) если  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi$ , т.е. оба колебания находятся в противофазе, то  $A = |A_1 - A_2|$ .

Если частоты колебаний  $x_1$  и  $x_2$  неодинаковы, векторы  $A_1$  и  $\vec{A}_2$  будут вращаться с различной угловой скоростью. В этом случае результирующий вектор  $\vec{A}$  пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Результирующим движением в этом случае будет не гармоническое колебание, а некоторый сложный процесс.

### **Биения**

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления имеют одинаковую амплитуду и мало отличаются по частоте. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармонические колебания с пульсирующей амплитудой. Такие колебания называются *биениями*.

Поскольку частоты колебаний несколько отличны, всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Если  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$  и  $\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ , то складываемые колебания в этом случае можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t; \\ x_2 &= A \cos\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t, \end{aligned} \quad (1.122)$$

при этом  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .



Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получим:

$$x = x_1 + x_2 = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega_0 t. \quad (1.123)$$

График функции (1.123) представлен на рис. 1.28, а. График построен для случая, когда  $\omega_0/\Delta\omega = 10$ . Заключение в скобки множитель в формуле (1.123) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Вследствие условия  $\omega_0 \gg \Delta\omega$  за то время, за которое множитель  $\cos \omega_0 t$  совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в скобках, почти не изменится.

Это дает нам основное рассматривать колебание (1.123) как гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону.

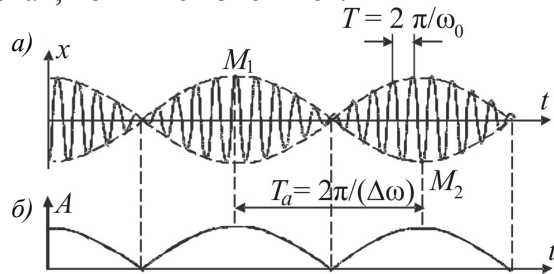


Рис. 1.28

График амплитуды показан на рис. 1.28, б. Амплитуда – величина положительная, поэтому выражение для результирующей амплитуды, очевидно, имеет вид

$$A_{\text{рез}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (1.124)$$

Выражение (1.124) является периодической функцией с частотой, в два раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля, т.е. с частотой  $\Delta\omega$ . Таким образом, частота пульсаций амплитуды – ее называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний. Период биений  $T_a = 2\pi/(\Delta\omega)$ .

### ***Сложение взаимно перпендикулярных колебаний***

Примером сложения колебаний различного направления является движение следа пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки (например, осциллографа) под действием на пучок двух взаимно перпендикулярных переменных электрических полей.

Рассмотрим результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной частоты  $\omega_0$ , происходящих вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Если возбудить оба колебания, то

материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_0 t, \\ y = B \cos(\omega_0 t + \alpha), \end{cases} \quad (1.125)$$

где  $\alpha$  – разность фаз складываемых колебаний.

Выражение (1.125) представляет собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Исключив из этих уравнений параметр времени  $t$ , можно получить уравнение траектории в неявном виде:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (1.126)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (1.126) есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей  $x$  и  $y$  определенным образом.

Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд  $A$  и  $B$  и разности фаз  $\alpha$ .

Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях:

1.  $\alpha = 0$ . В этом случае уравнение (1.126) принимает вид

$$\left( \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой (рис. 1.29, а):

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (1.127)$$

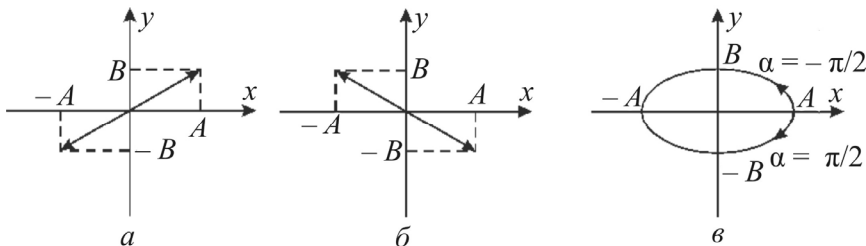


Рис. 1.29

2.  $\alpha = \pm \pi$ . Уравнение (1.126) принимает вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой (рис. 1.29, б):

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (1.128)$$

3.  $\alpha = \pm \pi/2$ . Уравнение (1.126) переходит в уравнение эллипса (рис. 1.29, в):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (1.129)$$

приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность. Случаи  $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = -\pi/2$  отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности.

Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиусом  $R$  с угловой скоростью  $\omega_0$  может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega_0 t, \\ y = \pm R \sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (1.130)$$

Знак «+» в выражении для  $y$  соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» – движению по часовой стрелке.

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину  $\Delta\omega$ , их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с изменяющейся разностью фаз. Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая последовательно принимает форму, отвечающую всем значениям разности фаз от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения может иметь вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. На рис. 1.30 показана одна из простейших траекторий, получающаяся при отношении частот 1:2, разности фаз, равной  $\pi/2$  (а) и нулю (б). Уравнения колебаний имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_0 t, \\ y = B \cos(2\omega_0 t + \alpha). \end{cases}$$

За то время, пока вдоль оси  $x$  точка успевает переместиться из одного крайнего положения в другое, вдоль оси  $y$ , выйдя из нулевого положения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение (см. рис. 1.30,  $a$ ).

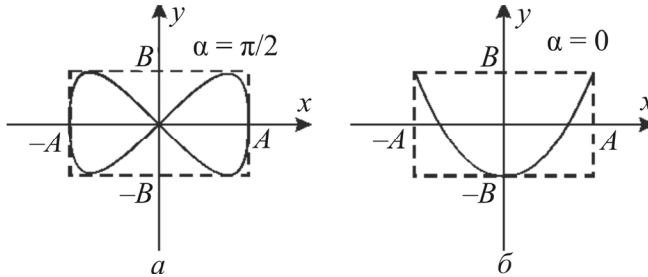


Рис. 1.30

В случае разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (см. рис. 1.30,  $b$ ), по которой точка движется туда и обратно.

### 1.3.4. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать. *Затухающими* называются колебания, происходящие в диссипативной колебательной системе.

#### *Уравнение затухающих колебаний*

При небольших скоростях движения сила сопротивления среды пропорциональна скорости:

$$F_{\text{сопр}x} = -rv_x = -r \frac{dx}{dt}, \quad (1.131)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды. Знак «минус» обусловлен тем, что сила и скорость имеют противоположные направления.

Уравнение движения (второй закон Ньютона) при наличии квазиупругих сил и сил сопротивления имеет вид:

$$ma_x = -kx - rv_x.$$

Введя обозначения

$$2\beta = \frac{r}{m} \text{ и } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.132)$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания;  $\omega_0$  – собственная циклическая частота колебаний системы (частота, с которой происходили бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при  $r = 0$ ), перепишем уравнение движения следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.133)$$

Соотношение (1.133) называется *дифференциальным уравнением затухающих колебаний*.

При не слишком сильном затухании (при  $\beta < \omega_0$ ) общее решение уравнения (1.133) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha). \quad (1.134)$$

Здесь начальная амплитуда  $A_0$  и фаза  $\alpha$  определяются из начальных условий, а  $\omega_3$  – циклическая частота затухающих колебаний,

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.135)$$

На рис. 1.31 представлен график функции (1.134). Пунктирными линиями показаны пределы, в которых изменяется смещение колеблющейся точки  $x$ .

При слабом затухании движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой  $\omega_3$  и амплитудой, изменяющейся по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (1.136)$$

Верхняя из пунктирных кривых на рис. 1.31 дает график функции  $A(t)$ , причем величина  $A_0$  представляет собой амплитуду в начальный момент времени.

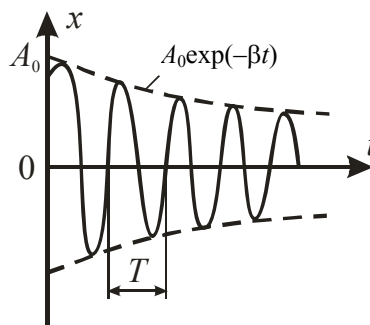


Рис. 1.31

## Характеристики затухания

Коэффициент затухания  $\beta$  характеризует скорость затухания колебаний:

$$\beta = r/2m. \quad (1.137)$$

Время релаксации  $\tau$  – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2,7$  раза. С учетом (1.136)

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e,$$

откуда  $\beta\tau = 1$ , или

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (1.138)$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.139)$$

Декремент затухания – отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (1.140)$$

Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  – натуральный логарифм от декремента затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (1.141)$$

За время  $\tau$  система успевает совершить  $N_e = \tau/T$  колебаний. Логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации  $\tau$ :

$$\lambda = \frac{1}{N_e}. \quad (1.142)$$

Добротность  $Q$  системы – величина, пропорциональная числу колебаний, совершаемых за время релаксации  $\tau$ :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (1.143)$$

### 1.3.5. Вынужденные колебания

*Вынужденными* называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (*вынуждающей силы*). Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t, \quad (1.144)$$

где  $\omega$  – частота вынуждающей силы;  $F_0$  – ее амплитуда.

При составлении уравнения движения (второго закона Ньютона) кроме вынуждающей силы необходимо учесть также и те силы, которые действуют в системе при свободных колебаниях, т.е. квазиупругую и силу сопротивления среды:  $ma_x = -kx - rv_x + F_0 \cos \omega t$ .

С учетом обозначений (1.132) приходим к *дифференциальному уравнению вынужденных колебаний*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (1.145)$$

Это неоднородное (правая часть отлична от нуля) дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения (1.134) однородного уравнения (1.133), соответствующего данному неоднородному, и частного решения данного неоднородного уравнения (которое можно найти по виду правой части):

$$x = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.146)$$

Амплитуду  $A$  и отставание по фазе  $\varphi$  можно найти, непосредственно подставляя частное решение (1.146) в уравнение (1.145), откуда:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (1.147)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.148)$$

Общее решение уравнения (1.145), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях, имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha) + A \cos(\omega t - \varphi).$$

Первое слагаемое в этом уравнении играет заметную роль только в начальной стадии процесса при установлении колебаний. С течением времени из-за экспоненциального множителя  $e^{-\beta t}$  роль этого слагаемого уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое.

Таким образом, функция (1.146) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (1.147) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  также зависит от частоты вынуждающей силы (см. формулу (1.148)).

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторому значению, называется *резонансом*, а соответствующая частота – *резонансной частотой*  $\omega_{\text{рез}}$ .

Выражение для резонансной частоты получаем, исследовав функцию (1.147) на максимум:

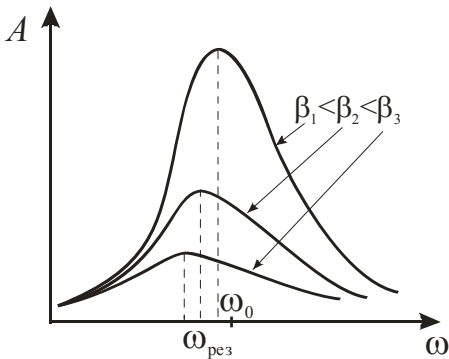


Рис. 1.32

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.149)$$

Этой частоте соответствует амплитуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.150)$$

На рис. 1.32 приведены графики зависимости амплитуды при вынужденных колебаниях от частоты вынуждающей силы и от коэффициента затухания. Видно, что максимум резонансной кривой смещен влево по оси  $\omega$  от  $\omega_0$ ; это смещение будет тем больше, чем больше коэффициент затухания  $\beta$ .



Вредные и полезные проявления резонансных явлений наблюдаются в природе и технике. Резонанс полезен в тех случаях, когда необходимо обнаружить слабые колебания или усилить их. На этом явлении основана вся аппаратура, воспринимающая и усиливающая звуковые и электрические колебания.

Нередко явление механического резонанса служит причиной катастроф. Например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут быть возбуждены вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае могут возникнуть разрушения. При вращении плохо отцентрированного мотора вследствие резонанса может произойти его поломка и повреждение фундамента здания, на котором расположен мотор.

### 1.3.6. Волновое движение

#### *Распространение волн в упругой среде*

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), передаются от одной точки среды к другой и распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начинает колебаться. Иначе говоря, фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше расстояние между частицей и источником. При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды, она рассматривается как *сплошная*, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется *волновым движением* или *волной*. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является *перенос энергии без переноса вещества*.

Волны могут иметь различную форму:

а) одиночная волна, или импульс, – короткое возмущение, не имеющее регулярного характера (рис. 1.33, а);

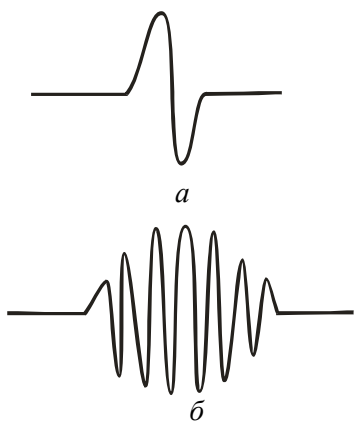


Рис. 1.33

б) *цуг* волн – ограниченный ряд возмущений (рис. 1.33, б);

в) гармоническая волна – бесконечная синусоидальная волна (рис. 1.34).

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяются следующие их типы: *волны на поверхности жидкости, упругие волны и электромагнитные волны* (см. подразд. 3.4).

Здесь рассмотрим упругие волны.

*Упругими* волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают *продольными* и *поперечными*. В продольных волнах частицы колеблются в направлении распространения волны, в поперечных – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*, т.е. в твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут распространяться в среде, в которой возникают упругие силы *при деформации сдвига*, т.е. фактически только в твердых телах; в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

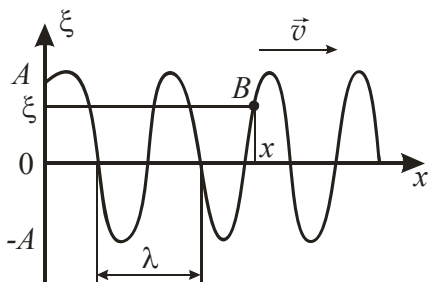


Рис. 1.34

*Упругая волна* называется *гармонической*, если соответствующие ей колебания частиц являются гармоническими. На рис. 1.34 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , т.е. приведена зависимость между смещением  $\xi$

частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием  $x$  до этих частиц (например, частицы  $B$ ) от источника колебаний для какого-то фиксированного момента времени  $t$ .

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*  $\lambda$  (см. рис. 1.34). Дли-

на волны равна тому расстоянию, на которое распространяется волна (определенная фаза колебания) за период:

$$\lambda = v T, \quad (1.151)$$

или

$$\lambda \nu = v, \quad (1.152)$$

где  $\nu$  – частота колебаний,  $\nu = 1/T$ .

Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , но и совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т.е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек, до которых колебания доходят к моменту времени  $t$ , называется *волновым фронтом*.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. В принципе волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно волна называется *плоской* или *сферической*.

### ***Уравнения плоской и сферической волн. Волновое уравнение***

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся точки как функцию ее координат и времени:  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ .

Найдем вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  (см. рис. 1.34). В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси  $x$ , а так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ , т.е.  $\xi = \xi(x, t)$ .

Рассмотрим некоторую частицу среды  $B$  (см. рис. 1.34), находящуюся от источника колебаний на расстоянии  $x$ . Если колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , описываются функцией  $\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ , то частица среды  $B$  колеблется по тому же

закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на  $\tau$ , так как для прохождения волной расстояния  $x$  требуется время  $\tau = x/v$ , где  $v$  – скорость распространения волны.

Тогда уравнение колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \left( \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right) = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} x + \alpha \right), \quad (1.153)$$

откуда следует, что  $\xi(x, t)$  является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты  $x$ .

Зафиксируем значение фазы волны:

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \alpha = \text{const.}$$

Взяв дифференциал этого выражения и сократив на  $\omega$ , получим  $dt - \frac{dx}{v} = 0$ , откуда  $\frac{dx}{dt} = v$ . Следовательно, скорость  $v$  распространения волны в уравнении (1.153) есть не что иное, как скорость перемещения фазы волны, поэтому ее называют *фазовой скоростью*.

Для характеристики волн используется также *волновое число*

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.154)$$

с учетом которого уравнению (1.153) можно придать вид

$$\xi(x, t) = A \cos (\omega t - kx + \alpha), \quad (1.155)$$

где  $(\omega t - kx + \alpha)$  – фаза распространяющейся волны;  $\alpha$  – начальная фаза, зависящая от выбора начала отсчета  $x$  и  $t$ .

Уравнение (1.155) называют *уравнением плоской волны*. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos (\omega t + kx + \alpha). \quad (1.156)$$

Если плоская волна (1.155) или (1.156) распространяется в среде, не поглощающей энергию, то *амплитуда волны*  $A = \text{const.}$

Повторяя ход рассуждений для плоской волны, можно показать, что уравнение сферической волны, волновые поверхности которой имеют вид концентрических сфер, записывается так:

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (1.157)$$

где  $A_0$  – амплитуда на расстоянии  $r = 1$ ;  $r$  – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону  $1/r$ , поскольку энергия волновой поверхности распространяется по все большей площади ( $S = 4\pi r^2$ ).

Если фазовая скорость волн зависит от их частоты, то это явление называется *дисперсией волн*, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, – *диспергирующей средой*.

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (1.158)$$

### **Энергия упругих волн. Вектор Умова**

*Бегущими* называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Если поглощением энергии при распространении волны пренебречь, то можно считать, что вся энергия колебаний  $W$  частиц среды целиком определяется энергетическим излучением источника (см. соотношение (1.103)):

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2},$$

где  $m$  – масса среды, вовлеченной в колебательный процесс.

Эта энергия передается частицам среды от источника и распределена в пространстве неравномерно. *Средняя объемная плотность энергии*, переносимой волной,

$$\langle w \rangle = \frac{W}{V} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \quad (1.159)$$

где  $\rho$  – плотность среды, в которой распространяется волна,  $\rho = \frac{m}{V}$ .

Итак, среда, в которой возникает волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной, следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *поток энергии*  $\Phi$  через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (1.160)$$

Поток энергии – скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии, деленной на размерность времени, т.е. совпадает с размерностью мощности:  $[\Phi] = \text{Вт}$ .

Поток энергии в разных точках среды может обладать различной интенсивностью. Для характеристики переноса энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*  $\vec{j}$ . Этот вектор для упругих волн называется *вектором Умова*. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны (рис. 1.35):

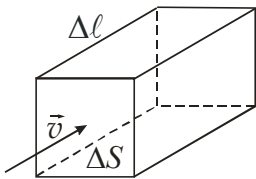


Рис. 1.35

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} = \frac{w \Delta S v \Delta t}{\Delta S \Delta t} = w v,$$

$$\vec{j} = w \vec{v}. \quad (1.161)$$

Итак, вектор Умова равен произведению объемной плотности энергии на вектор скорости распространения волны.

*Интенсивность волны J* – среднее значение энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$J = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2. \quad (1.162)$$

### **Интерференция волн**

При одновременном распространении нескольких волн колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности, т.е. волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется *принципом суперпозиции* (наложения) волн.

В случае когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называют *когерентными*. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. В более широком смысле под когерентностью понимают согласованное протекание двух и более колебательных или волновых процессов.

При наложении двух (или более) когерентных волн в разных точках пространства получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется *интерференцией волн*.

Рассмотрим две волны, распространяющиеся от точечных источников  $O_1$  и  $O_2$ , колеблющихся с постоянной разностью фаз (такие источники называют, как и порождаемые ими волны, *когерентными*). Определим результирующее колебание в какой-либо точке среды при условии, что оба колебания, вызываемые каждой из волн в отдельности, имеют одинаковое направление.

Пусть фазы колебаний источников  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно  $(\omega t + \alpha_1)$  и  $(\omega t + \alpha_2)$ . Тогда колебание в данной точке будет равно сумме колебаний:

$\xi_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \alpha_1)$  и  $\xi_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \alpha_2)$ , где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды волн в рассматриваемой точке;  $k$  – волновое число;  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки.

В точках, определяемых условием

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.163)$$

колебания усиливают друг друга, и результирующее движение представляет собой гармоническое колебание с частотой  $\omega$  и амплитудой  $(A_1 + A_2)$ .

Условие (1.163) называется *условием интерференционного максимума*. В точках, для которых

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.164)$$

колебания ослабляют друг друга, и результирующее движение является гармоническим колебанием с амплитудой  $|A_1 - A_2|$ . В частном случае, когда  $A_1 = A_2$ , колебания в этих точках будут отсутствовать.

### **Стоячие волны**

Особым случаем интерференции являются *стоячие волны* – это колебательный процесс, наблюдающийся при наложении двух встречных волн с одинаковыми амплитудами и частотами.

Рассмотрим две плоские волны, распространяющиеся навстречу друг другу вдоль оси  $x$  в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми частотами и амплитудами (см. соотношения (1.155) и (1.156)). Кроме того, начало координаты  $x$  и от-

счет времени  $t$  выберем для простоты таким образом, чтобы  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$ , и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид:

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx).$$

Сложив эти уравнения, преобразовав результат по формуле для суммы косинусов и учтя, что  $k = 2\pi/\lambda$ , получим *уравнение стоячей волны*:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos \omega t. \quad (1.165)$$

Из этого уравнения следует, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания одной и той же частоты  $\omega$  с амплитудой  $A_{ст} = |2A \cos(2\pi x/\lambda)|$ , зависящей от координаты  $x$  рассматриваемой точки. В точках среды, где  $2\pi x/\lambda = \pm m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного  $2A$ . Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Из этого условия получают значения координат пучностей (рис. 1.36):

$$x_{пучн} = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.166)$$

В точках среды, где  $2\pi x/\lambda = \pm (m + 1/2)\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов:

$$x_{узн} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.167)$$

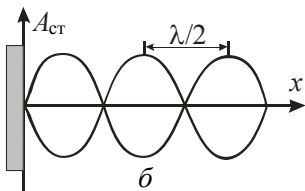
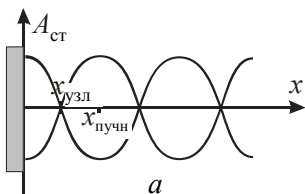


Рис. 1.36

Из формул (1.166) и (1.167) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны  $\lambda/2$ . Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно  $\lambda/4$ .

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе, все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, с одинаковыми

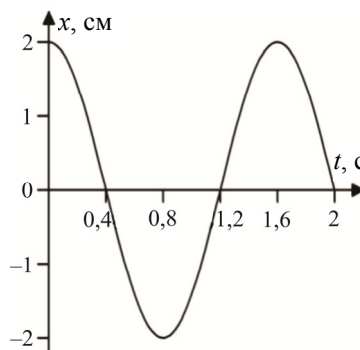


фазами. При переходе через узел множитель  $2A \cos(2\pi x/\lambda)$  в уравнении (1.165) меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на  $\pi$ , т.е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдается при интерференции бегущей и отраженной волн. Что будет на границе отражения – узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность (рис. 1.36, а), если более плотная – узел (рис. 1.36, б). В случае стоячей волны переноса энергии не наблюдается.

### Примеры решения задач

**№ 1.** Линейный гармонический осциллятор совершает колебания. Зависимость координаты колеблющегося тела от времени представлена на рисунке. Напишите в СИ уравнение гармонических колебаний в виде:  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ . Постройте графики, отражающие зависимость проекции скорости  $v_x$  и проекции ускорения  $a_x$  от времени.



**Р е ш е н и е.** По приведенному графику видно, что амплитуда (максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия)  $A = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$ ; период (время одного полного колебания)  $T = 1,6 \text{ с}$ . Следовательно,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,6} = \frac{5\pi}{4} \text{ рад/с}$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,6} = \frac{5\pi}{4} \text{ рад/с}$$

В момент времени  $t = 0 \text{ с}$  тело находится в точке с координатой  $x = A = 0,02 \text{ м}$ . Подставляем это значение в уравнение  $x(t)$ :

$$0,02 = 0,02 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

Подставляем в исходное уравнение значения  $A$ ,  $\omega$  и  $\alpha$ :

$$x = 0,02 \sin \left( \frac{5\pi}{4} t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Проекция скорости  $v_x = x' = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ .

Амплитуда скорости  $v_{xm} = A \cdot \omega = 0,02 \cdot \frac{5\pi}{4} = 7,85 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 7,85 \text{ см/с}$ .

Закон изменения проекции скорости примет вид

$$v_x = 7,85 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 7,85 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right).$$

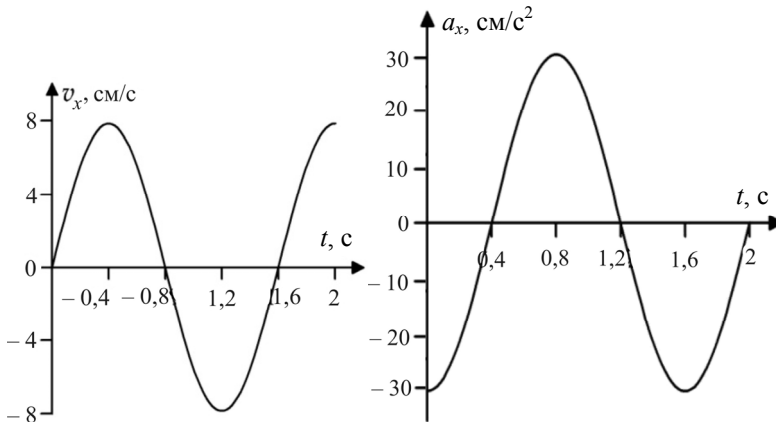
Проекция ускорения  $a_x = v'_x = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ .

Амплитуда ускорения  $a_{xm} = A \cdot \omega^2 = 0,02 \cdot \frac{25\pi^2}{16} = 0,308 \text{ м/с} = 30,8 \text{ см/с}$ .

Закон изменения проекции ускорения примет вид

$$a_x = -0,308 \sin\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,308 \sin\left(\frac{5\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Графики проекций скорости и ускорения представлены на рисунке.



**№ 2.** Уравнение колебания тела массой 2 кг имеет вид, см:  $x = 5 \cdot \cos \pi(t + 0,1)$ . Определите потенциальную энергию в момент времени  $t = 5$  с.

**Решение.** Согласно закону сохранения механической энергии сумма кинетической и потенциальной энергий гармонически колеблющегося тела остается одинаковой в любой момент времени, т.е.

$$W_k + W_{\pi} = W_{k \max} = W_{\pi \max},$$

где  $W_{k \max}$ ,  $W_{\pi \max}$  – максимальные кинетическая и потенциальная энергии;  $W_{k \max} = \frac{mv_m^2}{2}$ ;  $W_{\pi \max} = \frac{kA^2}{2}$ .

Скорость (см/с)  $v = x' = 5\pi \cdot \sin \pi(t + 0,1)$ , а амплитуда скорости  $v_m = 5\pi$  см/с.

Если в данный момент времени кинетическая энергия  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ , то потенциальная энергия в этот же момент времени

$$W_n = W_{k \max} - W_k = \frac{mv_m^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_m^2 - v^2)}{2} = \frac{m(v_m^2 - v_m^2 \cdot \sin^2(\omega t + \alpha))}{2}.$$

Учитывая, что  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{mv_m^2(1 - \sin^2(\omega t + \alpha))}{2} = \frac{mv_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot (5\pi \cdot 10^{-2})^2 \cos^2(\pi \cdot 5,1)}{2} = \frac{2 \cdot 247 \cdot 10^{-4} \cdot 0,951^2}{2} = 0,0223 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

**№ 3.** Однородный стержень длиной  $\ell = 1$  м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии  $\ell/4$  от его верхнего конца. Определите период и частоту колебаний стержня.

**Решение.** Период колебаний физического маятника определяется по формуле  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgb}}$ , где  $b$  – расстояние от оси колебаний, проходящей через точку  $O$ , до центра масс  $C$ ;  $I_O$  – момент инерции стержня относительно оси колебаний, который находим по теореме Штейнера:

$$I_O = I_C + mb^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{16 + 12}{192} m\ell^2 = \frac{7m\ell^2}{48}.$$

Тогда период

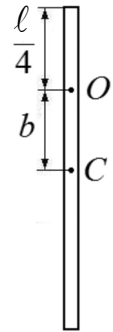
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7 \cdot m\ell^2 \cdot 4}{48 \cdot mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{7 \cdot \ell}{12 \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{7 \cdot 1}{12 \cdot 10}} = 1,52 \text{ с.}$$

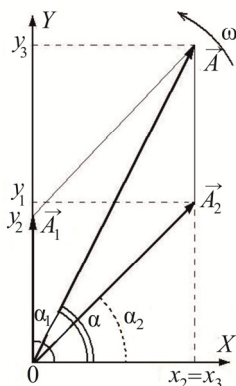
Частота колебаний  $\nu = \frac{1}{T} = 0,66$  Гц.

**№ 4.** Найдите амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями, м:

$$y_1 = 0,02 \cdot \sin(5\pi t + \pi/2);$$

$$y_2 = 0,03 \cdot \sin(5\pi t + \pi/4).$$





Д а н о:  $A_1 = 0,02$  м,  $A_2 = 0,03$  м,  $\alpha_1 = 0,5\pi$  рад,  $\alpha_2 = 0,25\pi$  рад.

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом векторных диаграмм. Векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  вращаются вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$  и начальными углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , законы колебаний  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  определяются проекциями этих векторов. Вектор результирующего колебания  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  вращается с той же угловой скоростью  $\omega$  и начальным углом  $\alpha$ .

Из правила сложения векторов следует:

$$y_3 = y_1 + y_2 = A_1 + A_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0,02 + 0,03 \cdot 0,707 = 0,0412 \text{ м.}$$

Из рисунка видно, что  $x_3 = x_2 = A_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0,03 \cdot 0,707 = 0,0212$  м.

Тогда  $A = \sqrt{y_3^2 + x_3^2} = 0,0464$  м;  $\alpha = \arctg \frac{y_3}{x_3} = \arctg \frac{4,12}{2,12} = 1,10$  рад.

Уравнение результирующего колебания имеет вид, м:

$$y_3 = 0,0464 \cdot \sin (5\pi t + 1,10).$$

**№ 5.** Математический маятник отклонился при первом колебании в одну сторону на 5 см, при втором колебании на 4 см в ту же сторону. Определите: а) декремент затухания; б) логарифмический декремент затухания.

Р е ш е н и е. Декремент затухания по определению – отношение двух последовательных амплитуд (через один период  $T$ ). По условию задачи  $A(t) = 5$  см,  $A(t + T) = 4$  см. Тогда

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln 1,25 = 0,223.$$

**№ 6.** Задано уравнение плоской волны:  $\xi = A \cdot \cos (\omega t - kx)$ , где  $A = 0,5$  см,  $\omega = 628$  рад/с,  $k = 2$  м<sup>-1</sup>. Определите: 1) частоту колебаний и длину волны; 2) максимальное значение скорости колебаний частиц среды.

Р е ш е н и е. Частота колебаний связана с циклической частотой по формуле  $\omega = 2\pi\nu$ , откуда  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{6,28} = 100$  Гц. Длина

волны связана с волновым числом по формуле  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ м.}$$

Скорость колебаний частиц среды  $v = \xi' = A\omega \cdot \sin(\omega t - kx)$ , максимальная скорость  $v_m = A\omega = 0,5 \cdot 628 = 314$  см/с = 3,14 м/с.

№ 7. Найдите разность фаз колебаний двух точек, находящихся на расстояниях соответственно 4 и 10 м от источника колебаний, если частота колебаний 25 Гц, скорость распространения колебаний 300 м/с.

Д а н о:  $x_1 = 4$  м,  $x_2 = 10$  м,  $\nu = 25$  Гц,  $v = 300$  м/с.

Р е ш е н и е. Пусть в среде распространяется плоская волна вдоль направления  $x$ , заданная уравнением  $\xi = A \cdot \sin(\omega t - kx)$ ; здесь разность  $(\omega t - kx)$  представляет собой фазу волны  $\varphi$ . Тогда в момент времени  $t_0$  разность фаз колебаний двух точек волны  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\omega t_0 - kx_1) - (\omega t_0 - kx_2) = k(x_2 - x_1)$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

$$\text{Скорость волны } v = \lambda\nu \Rightarrow k = \frac{2\pi\nu}{v}.$$

$$\text{Отсюда } \Delta\varphi = \frac{2\pi\nu}{v}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi \cdot 25}{300}(10 - 4) = \pi \text{ рад.}$$

#### 1.4. Основы гидроаэромеханики

*Гидроаэромеханика* – раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами. В данном разделе используется единый подход к изучению жидкостей и газов.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом различаются, в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями.

В механике жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства среды.

Главной особенностью жидкостей и газов является их текучесть, которая связана с малыми силами трения при относительном движении соприкасающихся слоев. При бесконечном уменьшении скорости отно-

сительного движения слоев силы трения между ними стремятся к нулю. Этим объясняется отсутствие сил трения покоя в жидкостях и газах.

### 1.4.1. Статика жидкостей и газов

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент площадью  $\Delta S$  с силами  $\Delta F$ . Эти силы независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно  $\Delta S$ , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости или газа на единицу площади, называется *давлением* жидкости или газа:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \quad (1.168)$$

Единица измерения давления – *паскаль*,  $[p] = \text{Па}$  ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ). Давление может также измеряться в *атмосферах* (атм), *миллиметрах ртутного столба* (мм рт. ст.) и других единицах. Полезно знать связь между ними:

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется з а к о н у П а с к а л я : *давление в любом месте покоящейся жидкости (газа) одинаково передается по всем направлениям, иначе говоря, силы, действующие со стороны жидкости (газа) на маленькую пластинку (площадку), не зависят от ее ориентации в данной точке пространства.*

Давление в жидкостях, находящихся в силовых полях (например, в поле силы тяжести), увеличивается с глубиной. Давление, обусловленное весом верхних слоев жидкости, называется *гидростатическим*. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность жидкости в состоянии покоя всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес жидкости  $P = \rho g S h$ , а давление жидкости на нижнее основание

$$p_{\text{ж}} = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h, \quad (1.169)$$

т.е. давление жидкости изменяется линейно с глубиной.

Полное давление в покоящейся жидкости складывается из атмосферного и гидростатического:

$$p = p_0 + \rho g h. \quad (1.170)$$

Силы давления на нижние слои будут больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила (рис. 1.37), определяемая законом Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):*

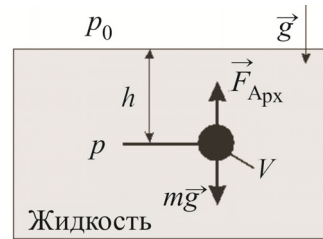


Рис. 1.37

$$F_{\text{Арх}} = \rho g V, \quad (1.171)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $V$  – объем вытесненной телом жидкости.

#### 1.4.2. Движение жидкостей и газов

Воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, называется *идеальной*.

*Линиями тока* называются такие линии, касательные к которым совпадают с векторами скорости движения жидкости в соответствующих точках пространства.

Поскольку величина и направление вектора скорости могут изменяться со временем, то и картина линий тока также может изменяться. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется *установившимся* или *стационарным*. Линии тока при стационарном течении совпадают с траекториями частиц.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока* (рис. 1.38). Жидкость при своем движении не пересекает стенок трубки тока, так как вектор скорости в каждой точке направлен (по определению) по касательной к линиям тока, из которых состоит трубка тока.

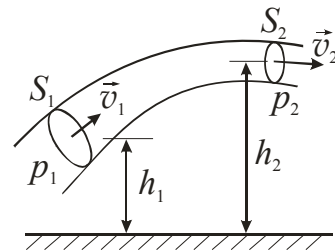


Рис. 1.38

Возьмем трубку тока настолько тонкую, что для произвольного сечения скорость можно считать одинаковой в каждой точке этого сечения. За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  трубки тока со скоростью  $v$  протекает жидкость объемом, равным  $Sv\Delta t$ . Если жидкость *несжимаема* (т.е. плотность всюду одинакова и изменяться не может), то количество жидкости между произвольными сечениями  $S_1$  и  $S_2$  трубки тока (см. рис. 1.38) будет оставаться неизменным. Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие за единицу времени через произвольные сечения  $S_1$  и  $S_2$ , одинаковы:  $v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$ .

Таким образом, приходим к *уравнению неразрывности струи*: при стационарном течении несжимаемой жидкости величина  $vS$  в любом сечении одинакова:

$$vS = \text{const}, \quad (1.172)$$

т.е. скорость жидкости возрастает в сужающихся и падает в расширяющихся участках струи.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока и рассмотрим произвольные сечения  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 1.38). Пусть в месте сечения  $S_1$  скорость течения равна  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота, на которой это сечение расположено,  $h_1$ . Аналогично в месте сечения  $S_2$  скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$  и высота  $h_2$ . По закону сохранения энергии для этих сечений выполняется равенство:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Поскольку сечения выбирались произвольно, то можем записать:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (1.173)$$

Соотношение (1.173) называется *уравнением Бернулли*. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной несжимаемой жидкости.

Величина  $p$  в формуле (1.173) называется статическим давлением (давление жидкости на поверхности обтекаемого ею тела),  $\frac{\rho v^2}{2}$  – динамическим давлением,  $\rho gh$  – гидростатическим давлением.



### Примеры решения задач

**№ 1.** В U-образную трубку налита ртуть. Сверху в одно колено заливают 68 г воды. Площадь сечения трубки  $1 \text{ см}^2$ , плотность ртути  $13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Определите, насколько уровень жидкости в одном колене выше, чем в другом.

Д а н о:  $m = 0,068 \text{ кг}$ ,  $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . На рисунке:  $H_0$  – первоначальный уровень ртути,  $h_1$  – уровень ртути в левом колене,  $h_2$  – уровень ртути в правом колене,  $h_{\text{в}}$  – высота столба воды. Необходимо найти  $\Delta h$ .

Р е ш е н и е. Из рисунка разность уровней  $\Delta h = h_{\text{в}} + h_1 - h_2 = h_{\text{в}} - 2h$ .

Давление жидкости в левом колене

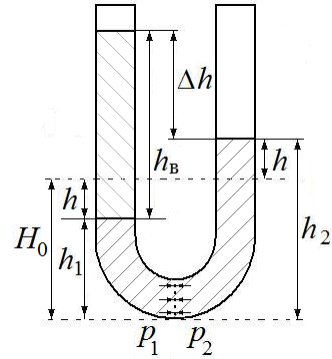
$$p_1 = \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} + \rho_{\text{рт}}gh_1 = \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} + \rho_{\text{рт}}g(H_0 - h).$$

Давление жидкости в правом колене

$$p_2 = \rho_{\text{рт}}gh_2 = \rho_{\text{рт}}g(H_0 + h).$$

Условие равновесия жидкости – равенство давлений:  $p_1 = p_2$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} + \rho_{\text{рт}}gH_0 - \rho_{\text{рт}}gh &= \rho_{\text{рт}}gH_0 + \rho_{\text{рт}}gh \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} - \rho_{\text{рт}}gh &= \rho_{\text{рт}}gh \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} = 2\rho_{\text{рт}}gh &\Rightarrow 2h = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}}h_{\text{в}}. \end{aligned}$$



Разность уровней

$$\Delta h = h_{\text{в}} - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}}h_{\text{в}} = h_{\text{в}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right).$$

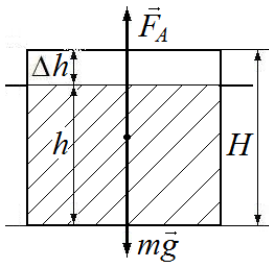
Поскольку масса воды  $m = \rho_{\text{в}}V_{\text{в}} = \rho_{\text{в}}Sh_{\text{в}}$ , то высота столба воды

$$h_{\text{в}} = \frac{m}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Наконец,

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_{\text{в}}S} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right) = \frac{0,068}{10^3 \cdot 10^{-4}} \left( 1 - \frac{10^3}{13,6 \cdot 10^3} \right) = 0,63 \text{ м}.$$

**№ 2.** Льдина равномерной толщины плавает, выступая над уровнем воды на высоту 2 см. Плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ . Найдите массу льдины, если площадь ее основания  $200 \text{ см}^2$ .



Д а н о:  $\Delta h = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$ ,  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  
 $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $S = 200 \text{ см}^2 = 0,02 \text{ м}^2$ .

Р е ш е н и е. По условию равновесия:

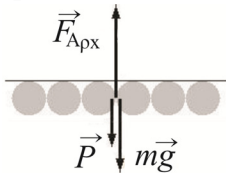
$$F_{\text{тяж}} = F_{\text{Арх}} \text{ или } mg = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} \Rightarrow \rho_{\text{л}} V = \rho_{\text{в}} V_{\text{погр}},$$

где  $V$  – объем льдины,  $V = SH$ ;  $V_{\text{погр}}$  – объем погруженной части,  $V_{\text{погр}} = Sh = S(H - \Delta h)$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \rho_{\text{л}} SH &= \rho_{\text{в}} S(H - \Delta h) \Rightarrow \rho_{\text{л}} H = \rho_{\text{в}} (H - \Delta h) \Rightarrow H(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) = \\ &= \rho_{\text{в}} \Delta h \Rightarrow H = \frac{\rho_{\text{в}} \Delta h}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}. \end{aligned} \text{ Отсюда масса льдины}$$

$$m = \rho_{\text{л}} SH = \frac{\rho_{\text{л}} \rho_{\text{в}} S \Delta h}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} = \frac{900 \cdot 1000 \cdot 0,02 \cdot 0,02}{100} = 3,6 \text{ кг}.$$

**№ 3.** Какой максимальной подъемной силой обладает плот, сделанный из 10 бревен объемом по  $0,6 \text{ м}^3$  каждое, если плотность дерева  $700 \text{ кг/м}^3$ ?



Д а н о:  $V_{\text{плота}} = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ м}^3$ ,  $\rho_{\text{д}} = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  
 $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Р е ш е н и е. Согласно третьему закону Ньютона, подъемная сила плота равна по модулю и противоположна по направлению силе

веса  $\vec{P}$ , действующей на плот со стороны груза при полном погружении плота. По рисунку  $P + mg = F_{\text{Арх}}$ , где  $m$  – масса плота. Тогда подъемная сила плота

$$\begin{aligned} F_{\text{под}} = P &= F_{\text{Арх}} - mg = \rho_{\text{в}} g V_{\text{плота}} - \rho_{\text{д}} g V_{\text{плота}} = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}) g V_{\text{плота}}, \\ F_{\text{под}} &= (1000 - 700) \cdot 10 \cdot 6 = 18000 = 18 \text{ кН}. \end{aligned}$$

## 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

### 2.1. Молекулярно-кинетическая теория

#### 2.1.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

*Молекулярно-кинетическая теория* (МКТ) – учение, которое объясняет строение и свойства вещества движением и взаимодействием частиц, из которых оно состоит.

МКТ основана на следующих положениях:

- 1) все вещества состоят из частиц (атомов и молекул);
- 2) эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении (такое движение молекул называют также *тепловым движением*, поскольку скорости движения частиц зависят от степени нагретости тел);
- 3) между частицами существуют силы притяжения и отталкивания.

Эти положения подтверждаются явлениями *диффузии*, *броуновского движения*, особенностями строения и свойствами жидкостей и твердых тел.

#### ***Основные понятия МКТ***

*Атом* – наименьшая частица химического элемента.

*Молекула* – наименьшая устойчивая частица данного вещества, обладающая его основными химическими свойствами. Молекула состоит из атомов.

Отдельные атомы и молекулы визуально невозможно наблюдать даже в самый мощный оптический микроскоп ввиду их малости. Линейные размеры атомов составляют порядка одного *ангстрема*:  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ . Наблюдение атомов и молекул стало возможным с изобретением электронного микроскопа.

*Диффузия* – процесс выравнивания плотностей (или концентраций) контактирующих или самопроизвольно смешивающихся веществ.

*Броуновское движение* – непрерывное беспорядочное движение малых, взвешенных в жидкости или газе макроскопических твердых частиц. Это движение не зависит от внешних причин и обусловлено молекулярным движением в веществе.

*Макроскопическое тело* – тело, состоящее из очень большого числа частиц – атомов и молекул.

Измерять массы атомов и молекул удобнее в атомных единицах массы. *Атомная единица массы*  $m_u$  численно равна 1/12 массы атома углерода (точнее, его изотопа  $^{12}_6\text{C}$ ):

$$m_u = \frac{1}{12} m_{\text{атома } ^{12}_6\text{C}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1 \text{ а.е.м.} \quad (2.1)$$

*Относительная атомная масса*  $A_r$  химического элемента – отношение массы атома этого элемента к атомной единице массы:

$$A_r = \frac{m_{\text{атома}}}{m_u}. \quad (2.2)$$

*Относительная молекулярная масса*  $M_r$  вещества – отношение массы молекулы этого вещества к атомной единице массы:

$$M_r = \frac{m_{\text{мол}}}{m_u}. \quad (2.3)$$

Из определений относительных атомной и молекулярной масс следует, что они безразмерные.

*Количество вещества*  $\nu$  – физическая величина, определяемая числом структурных элементов (атомов или молекул), из которых состоит вещество. Единицей количества вещества является *моль*,  $[\nu] = \text{моль}$ ; 1 моль – количество вещества, в котором содержится число частиц, равное числу атомов в 0,012 кг углерода (изотопа  $^{12}_6\text{C}$ ). Число частиц в одном моле называется *постоянной Авогадро*:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ . *Молярная масса*  $\mu$  – масса одного моля,  $[\mu] = \text{кг/моль}$ .

Количество вещества  $\nu$  можно определить через массу  $m$  вещества или через число молекул  $N$  (или атомов):

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}. \quad (2.4)$$

Массу молекулы можно определить через относительную молекулярную или молярную массу:

$$m_{\text{мол}} = m_u M_r = \frac{\mu}{N_A}. \quad (2.5)$$

Отсюда можно установить связь молярной и относительной молекулярной масс (кг/моль):

$$\mu = m_u N_A M_r = 10^{-3} M_r. \quad (2.6)$$

### ***Агрегатные состояния вещества***

От интенсивности теплового движения молекул и интенсивности их взаимодействия зависит *агрегатное состояние* вещества (*твердое, жидкое, газообразное, плазменное*). По мере увеличения интенсивности теплового движения среднее расстояние между молекулами возрастает, а силы притяжения уменьшаются, и тело переходит из твердого состояния в жидкое, из жидкого в газообразное и т.д.

Любая реальная макроскопическая система – очень сложный объект, так как состоит из большого числа взаимодействующих частиц. Закономерности макросистем рассмотрим на самой простой из них – идеальном газе.

*Идеальный газ* – это модель газа, молекулы которого не взаимодействуют между собой на расстоянии, и их размерами можно пренебречь. Реальные газы по свойствам близки к идеальному при обычных условиях.

### ***Основное уравнение МКТ (уравнение Клаузиуса)***

При своем движении молекулы газа ударяются о стенку сосуда, в котором заключен газ, создавая тем самым давление на стенку. Это давление можно найти, исходя из молекулярно-кинетических представлений, предполагая следующее:

- а) давление газа не зависит от формы сосуда;
- б) столкновение молекул идеального газа со стенками сосуда подчиняется законам абсолютно упругого столкновения;
- в) если газ находится в равновесии, то все направления движения молекул равновероятны.

Применив законы механики, с учетом этих предположений можно рассчитать давление газа на стенку сосуда:

$$p = \frac{1}{3} n m_{\text{мол}} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n m_{\text{мол}} v_{\text{ср.кв}}^2, \quad (2.7)$$

где  $n$  – *концентрация* (число молекул в единице объема),  $n = N/V$ ,

$[n] = \text{м}^{-3}$ ;  $\langle v^2 \rangle$  – среднее значение квадрата скорости,  $\langle v^2 \rangle = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) / N$ ;  $v_{\text{ср.кв}}$  – средняя квадратичная скорость,

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

Выражение (2.7) называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории* идеальных газов или *уравнением Клаузиуса*.

Внеся массу молекулы в уравнении (2.7) под знак осреднения, можно прийти к соотношению

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m_{\text{мол}} v^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle, \quad (2.8)$$

где  $\langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Умножив уравнение (2.8) на объем  $V$  сосуда, в котором находится газ, получим:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle = \frac{2}{3} W_{\text{к. пост}}, \quad (2.9)$$

где  $W_{\text{к. пост}}$  – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул в объеме  $V$ .

### 2.1.2. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы

Физические величины, характеризующие то или иное состояние вещества, называются *параметрами состояния*.

*Уравнение состояния* – уравнение, связывающее между собой параметры состояния. Основными параметрами газообразного состояния являются объем  $V$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , концентрация  $n$  и температура.

*Температура* – это скалярная физическая величина, характеризующая интенсивность хаотического движения частиц системы. Температура измеряется в градусах соответствующей шкалы (Цельсия  $t, ^\circ\text{C}$ ; Кельвина  $T, \text{K}$ ) и характеризует степень нагретости тела.

Температура по шкале Кельвина  $T$  называется *абсолютной* или *термодинамической*. За начало отсчета абсолютной температуры –

*абсолютный нуль* – принята такая температура, при которой прекращается хаотическое поступательное движение частиц системы. Абсолютная температура связана с температурой по шкале Цельсия соотношением:  $T = t + 273,16$ , деления же шкал одинаковы:  $1 \text{ К} = 1^\circ\text{С}$ .

Опытным путем установлено, что при обычных условиях параметры состояния таких газов, как кислород и азот, при неизменной массе газа хорошо подчиняются уравнению

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \quad (2.10)$$

причем чем разреженней газ, тем точнее выполняется соотношение. Следовательно, соотношение (2.10) является уравнением состояния идеального газа.

*Закон Авогадро*: при одинаковых давлениях и температуре в равных объемах различных газов содержится одинаковое число молекул. В частности, при нормальных условиях ( $t_0 = 0^\circ\text{С}$ ,  $p_0 = 1 \text{ атм}$ ) объем моля  $V_m$  идеального газа равен 22,4 литра:  $V_m = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

Отсюда следует, что в случае, когда количество газа равно одному молю, константа в (2.10) будет одинаковой для всех газов. Ее обозначают буквой  $R$  и называют *универсальной газовой постоянной*:

$$R = \frac{p_0 V_m}{T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Тогда уравнение (2.10) для одного моля можно записать в виде

$$pV_m = RT. \quad (2.11)$$

Учитывая, что  $\nu$  молей газа будет занимать пропорционально больший объем  $V = \nu V_m$ , можно прийти к уравнению состояния для произвольной массы или количества вещества газа, умножив (2.11)

на количество молей  $\nu = \frac{m}{\mu}$ :

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2.12)$$

где  $m$  – масса газа;  $\mu$  – молярная масса газа.

Уравнение (2.12) называется *уравнением Менделеева – Клапейрона* для произвольной массы газа.

Учитывая, что плотность газа  $\rho = \frac{m}{V}$ , уравнению состояния можно придать вид

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT. \quad (2.13)$$

Поделим уравнение (2.12) на объем и выразим количество вещества через число молекул (2.4):  $p = \frac{N R}{N_A V} T$ . Отношение констант

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$
 называют *коэффициентом Больцмана*.

С учетом того, что отношение  $\frac{N}{V}$  – это концентрация  $n$ , можно записать:

$$p = n k T. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) показывает, что давление идеального газа при заданной температуре определяется только числом молекул в единице объема и не зависит от рода молекул.

Из формулы (2.14) вытекает еще один справедливый для идеального газа закон – закон Дальтона для смеси газов.

Пусть имеется смесь нескольких, не взаимодействующих друг с другом идеальных газов. Допустим, что в единичном объеме смеси содержится  $n_1$  молекул первого газа,  $n_2$  молекул второго газа и т.д. Тогда общее число молекул в единичном объеме  $n = n_1 + n_2 + \dots$ . Согласно (2.14) давление газа определяется так:

$$p = n k T = (n_1 + n_2 + \dots) k T = n_1 k T + n_2 k T + \dots = p_1 + p_2 + \dots,$$

где  $p_1, p_2, \dots$  – давления, которые оказывали бы газы этой смеси, если бы они заполняли объем по отдельности. Эти давления называются *парциальными*. В итоге закон Дальтона гласит: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в смесь*:

$$p = p_1 + p_2 + \dots \quad (2.15)$$



*Изопроцессами* называются процессы, при которых один из параметров состояния не изменяется.

Графическое изображение изопроцессов в координатах  $(p, V)$ ,  $(p, T)$  и  $(V, T)$  соответственно представлено на рис. 2.1, а, б, в.

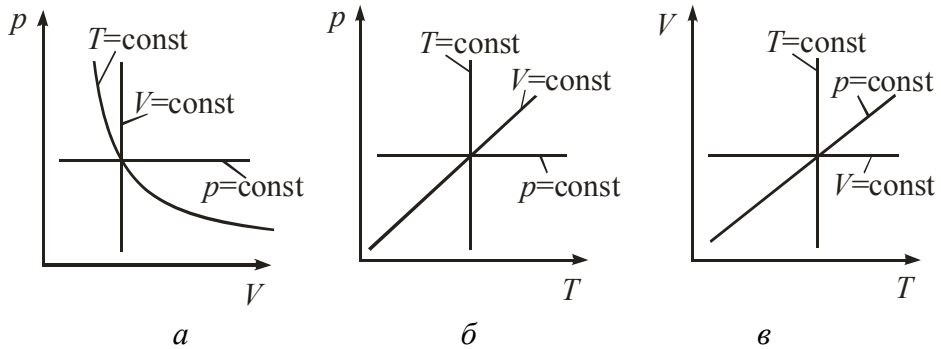


Рис. 2.1

Различают изотермический ( $T = \text{const}$ ), изобарный ( $p = \text{const}$ ), изохорный ( $V = \text{const}$ ) и другие процессы. Сформулируем законы для изопроцессов в идеальном газе, предполагая, что количество вещества неизменно, т.е.  $\frac{pV}{T} = \text{const}$  :

1. *Изотермический процесс.* При  $T = \text{const}$  получаем закон Бойля – Мариотта:

$$pV = \text{const}. \quad (2.16)$$

2. *Изобарный процесс.* При  $p = \text{const}$  получаем закон Гей-Люссака:

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \quad (2.17)$$

3. *Изохорный процесс.* При  $V = \text{const}$  получаем закон Шарля:

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \quad (2.18)$$

### 2.1.3. Средняя энергия молекул

Из соотношений (2.7), (2.8) и (2.14) следует:

$$p = \frac{1}{3} n m_{\text{мол}} v_{\text{ср.кв}}^2 = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle = nkT.$$

Отсюда видно, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы пропорциональна абсолютной температуре:

$$\langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle = \frac{3}{2} k T, \quad (2.19)$$

а средняя квадратичная скорость

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\text{мол}}}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (2.20)$$

Только поступательно движутся лишь одноатомные молекулы. Двух- и многоатомные молекулы, кроме поступательного, могут совершать также вращательное и колебательное движения. Эти виды движения связаны с некоторым запасом энергии, вычислить который позволяет закон о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы молекулы.

При любом числе степеней свободы (см. подразд. 1.1.1) молекулы три – поступательные, причем ни одна из них не имеет преимущества перед другими. На три поступательные степени свободы приходится энергия, равная  $\frac{3}{2} kT$ , следовательно, на каждую поступательную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ .

В соответствии с законом о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы *на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ .*

Если между атомами в молекуле действует квазиупругая сила, то следует учесть, что при колебательном движении среднее значение кинетической энергии равно среднему значению потенциальной, поэтому колебательная степень свободы обладает удвоенной энергетической емкостью.

Таким образом, для средней кинетической энергии молекулы получается выражение

$$\langle \varepsilon_{\text{мол}} \rangle = \frac{i}{2} k T, \quad (2.21)$$

где  $i$  – сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы,

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}. \quad (2.22)$$

Для молекул с жесткой связью между атомами  $i$  совпадает с числом степеней свободы молекулы.

#### 2.1.4. Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям

В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое количество молекул. Согласно молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость (2.20) молекул газа массой  $m$  в газе, находящемся в состоянии равновесия при  $T = \text{const}$ , остается постоянной. Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, подчиняющееся вполне определенному закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом.

Максвелл предполагал, что газ состоит из большого числа  $N$  одинаковых молекул (они находятся в состоянии хаотического теплового движения при одинаковой температуре) и что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла определяет некоторую функцию  $f(v)$ , называемую *функцией распределения молекул по скоростям*.

Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в интервале  $[v, v + dv]$  (или *вероятность*  $dP$  того, что скорость молекулы принадлежит данному интервалу):

$$dP = \frac{dN(v)}{N} = f(v)dv. \quad (2.23)$$

Вероятность того, что молекула имеет какую-либо скорость, равна единице:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1. \quad (2.24)$$

Условие (2.24) называют *условием нормировки*.

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашел функцию  $f(v)$  – закон распределения молекул идеального газа по скоростям (рис. 2.2):

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{m_{\text{мол}} v^2}{2kT}\right), \quad (2.25)$$

где  $k$  – коэффициент Больцмана;  $A$  – константа, найденная из условия нормировки (2.24), бесконечный верхний предел для скорости в котором оправдан ввиду малости подинтегрального выражения

для больших скоростей,  $A = 4\pi \left(\frac{m_{\text{мол}}}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

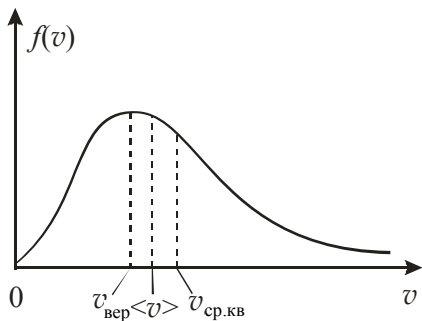


Рис. 2.2

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется *наиболее вероятной скоростью*  $v_{\text{вер}}$ . Значение наиболее вероятной скорости можно найти, исследовав на максимум функцию (2.25):

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_{\text{мол}}}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.26)$$

*Средняя скорость* молекулы  $\langle v \rangle$  (средняя арифметическая скорость) и среднее значение квадрата скорости  $\langle v^2 \rangle$  определяются по формулам из теории вероятностей:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \quad \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv.$$

Произведя вычисления, можно получить:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{мол}}}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}, \quad (2.27)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_{\text{мол}}} = \frac{3RT}{\mu}, \quad (2.28)$$

откуда для средней квадратичной скорости получается соотношение (2.20). Приведенные характерные скорости отличаются друг от друга в следующих пропорциях:

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{ср.кв}} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

Зная распределение Максвелла по скоростям (2.25), можно, например, оценить число молекул, скорости которых лежат в произвольном интервале  $[v_1, v_2]$ :

$$\Delta N = N \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv, \quad (2.29)$$

где  $N$  – общее число молекул.

### 2.1.5. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе закона Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям мы предположили, что на молекулы газа внешние силы не действуют. Поэтому можно было считать, что молекулы равномерно распределены по объему сосуда; температура везде одинакова.

На самом деле молекулы газа всегда находятся в поле тяготения Земли. Если бы не было теплового движения, то все молекулы атмосферного воздуха упали бы на Землю, а если бы не было тяготения, то атмосферный воздух рассеялся бы по всей Вселенной. Тяготение и тепловое движение приводят газ в состояние, при котором его концентрация и давление убывают с высотой.

Пусть идеальный газ находится в равновесном состоянии в однородном поле тяготения Земли. Давление газа на высоте  $h$  обусловлено весом вышележащих слоев. Обозначим  $p$  давление на высоте  $h$ , тогда давление на высоте  $h + dh$  равно  $p + dp$ , причем если  $dh > 0$ , то  $dp < 0$ , так как вес вышележащих слоев атмосферы, а следовательно, и давление с высотой убывают. Разность давлений  $p$  и  $p + dp$  равна весу газа, заключенного в объеме вертикального цилиндра с площадью основания, равной единице, и высотой  $dh$ :  $p - (p + dp) = \rho g dh$ , где  $\rho$  – плотность газа на высоте  $h$ . Отсюда

$$dp = -\rho g dh. \quad (2.30)$$

Из уравнения состояния идеального газа (2.13) выразим плотность газа  $\rho$ , подставляя в (2.29), получим приращение давления:

$$dp = -\frac{\rho g \mu}{RT} dh, \text{ интегрируя которое (полагая } T = \text{const) по высоте от}$$

$$0 \text{ до } h, \text{ получим: } \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \text{ или}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \quad (2.31)$$

где  $p$  и  $p_0$  – давления газа на высотах  $h$  и  $h = 0$ .

Формула (2.31) называется *барометрической*. Из нее следует, что давление убывает с высотой по экспоненциальному закону.

Барометрическая формула позволяет определять высоту  $h$  с помощью барометра. Специально проградуированный барометр для непосредственного отсчета высоты над уровнем моря называют *альтиметром*. Его широко применяют в авиации, при восхождении на горы.

Преобразуя в выражении (2.31) показатель степени (поделив на число Авогадро), получаем:

$$p = p_0 e^{-\frac{m_{\text{мол}} g h}{kT}}, \quad (2.32)$$

где  $m_{\text{мол}} g h = \varepsilon_{\text{п}}$  – потенциальная энергия молекулы на высоте  $h$ .

При  $T = \text{const}$  давление  $p$  пропорционально концентрации молекул  $n$  (см. (2.14)), поэтому можем записать:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_{\text{мол}} g h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}}, \quad (2.33)$$

где  $n$  и  $n_0$  – концентрации молекул на высотах  $h$  и  $h = 0$ .

Больцман показал, что распределение (2.33) справедливо не только в потенциальном поле сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. Поэтому распределение (2.33) называют законом Больцмана.

### 2.1.6. Явления переноса в газах

При отсутствии равновесия в газе всегда имеется пространственная неоднородность тех или иных его параметров – плотности,

давления, температуры. Если такой газ предоставить самому себе, то хаотическое движение молекул постепенно выравнивает эти неоднородности и газ приходит в состояние термодинамического равновесия.

Явления выравнивания сопровождаются направленным переносом ряда физических величин: массы, импульса, энергии и т.д. – и поэтому называются *явлениями переноса*.

К явлениям переноса относятся *диффузия* (обусловленная переносом массы), *теплопроводность* (обусловленная переносом энергии) и *внутреннее трение*, или *вязкость* (обусловленная переносом импульса).

В основе всех явлений переноса лежит один и тот же механизм: беспорядочность теплового движения молекул газа, непрерывные соударения между ними приводят к постоянному перемешиванию частиц и изменению их скоростей и энергий. Если в газе существует пространственная неоднородность (градиент) плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев газа, то тепловое движение молекул выравнивает эти неоднородности. Таким образом, явления переноса возникают вследствие наложения хаотического движения молекул окружающей среды на упорядоченное перемещение молекул в отдельных слоях газа.

*Диффузия.* Диффузия в газе (жидкости) – это процесс перемешивания молекул, сопровождающийся переносом массы из мест с большей концентрацией (плотностью) данных молекул в места с меньшей концентрацией этих молекул. Таким образом, в процессе диффузии переносится масса, а изменяющейся величиной является плотность газа  $\rho$ .

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется закону Фика:

$$J_{mx} = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (2.34)$$

где  $J_{mx}$  – *плотность потока массы* вдоль оси  $x$  – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $J_{mx} = \frac{\Delta m}{\Delta S_{\perp} \Delta t}$ ;

$D$  – коэффициент диффузии,  $[D] = \text{м}^2/\text{с}$ ;  $\frac{d\rho}{dx}$  – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины  $x$ .

Коэффициент диффузии  $D$  численно равен плотности потока массы при единичном градиенте плотности.

*Теплопроводность.* Если в одной области газа (жидкости) средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, иными словами выравнивание температур.

Перенос энергии (в форме теплоты) подчиняется закону Фурье:

$$J_{Ex} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (2.35)$$

где  $J_{Ex}$  – плотность теплового потока вдоль оси  $x$  – величина, определяемая энергией, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $J_{Ex} = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp} \Delta t}$ ;  $\lambda$  – ко-

эффициент теплопроводности,  $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;  $\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры, равный изменению температуры на единицу длины  $x$ . Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  численно равен плотности теплового потока при единичном градиенте температуры.

*Внутреннее трение (вязкость).* Вязкость жидкости (газа) характеризует те силы внутреннего трения, которые имеют место, когда отдельные слои жидкости движутся с разными скоростями. На рис. 2.3 показаны условно выделенные слои, движущиеся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + d\vec{v}$ . Именно между такими слоями и возникают силы трения. Механизм появления этих сил можно представить следующим образом. В результате *теплового* движения молекулы жидкости переходят из одного слоя в другой, перенося при этом и импульс *упорядоченного* движения. При этом импульс *упорядоченного* движения слоя, который движется быстрее, уменьшается, а импульс слоя с меньшей скоростью увеличивается, т.е. слой с большей скоростью тормозится, а слой с меньшей скоростью ускоряется. А это и означает, что между слоями возникают силы внутреннего трения.



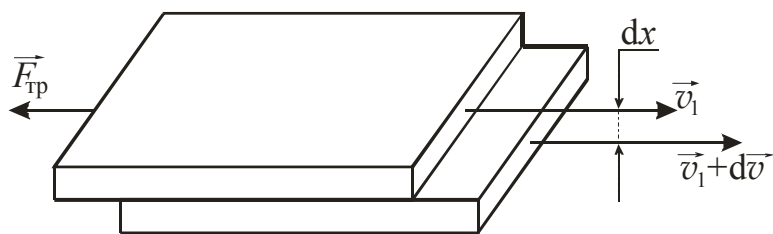


Рис. 2.3

Опыт показал, что сила внутреннего трения зависит от площади поверхности слоев  $S$  жидкости и от градиента скорости жидкости  $dv/dx$  (в направлении, перпендикулярном скорости):

$$F_{\text{тр}} = \eta S \left| \frac{dv}{dx} \right|. \quad (2.36)$$

Коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется *динамической вязкостью* (*коэффициентом вязкости жидкости*);  $[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}$ . Следовательно,  $\eta = \frac{F_{\text{тр}}}{S \frac{\Delta v}{\Delta x}}$ . Таким образом, коэффициент вязкости чис-

ленно равен силе внутреннего трения, приходящейся на единицу площади при градиенте скорости, равном единице.

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, равный по модулю действующей силе. Тогда выражение (2.36) можно представить в виде

$$J_{px} = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (2.37)$$

где  $J_{px}$  – *плотность потока импульса* вдоль оси  $x$  – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени вдоль оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную этой

$$\text{оси, } J_{px} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta S_{\perp} \Delta t}.$$

Из сопоставления формул (2.34), (2.35) и (2.37), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой.

### 2.1.7. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

При описании свойств газов мы пользовались моделью идеального газа, молекулы которого не взаимодействуют между собой на расстоянии, и их размерами можно пренебречь.

С увеличением давления и понижением температуры поведение реального газа отличается от поведения идеального газа, так как средние расстояния между молекулами уменьшаются и становится существенным взаимодействие молекул друг с другом. Кроме того, суммарный объем самих молекул становится соизмеримым с объемом сосуда, в котором находится газ.

Из большого числа уравнений, предложенных для описания поведения реальных газов, самым простым и вместе с тем дающим достаточно хорошие результаты оказалось уравнение голландского физика Й.Д. Ван-дер-Ваальса (1873).

Ван-дер-Ваальс предложил внести поправки к давлению и объему в уравнение Менделеева – Клапейрона (2.11):

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \quad (2.38)$$

где  $a$  и  $b$  – *постоянные Ван-дер-Ваальса*, определяемые для каждого конкретного газа опытным путем.

Поправка  $\frac{a}{V_M^2}$  к давлению, обусловленная действием сил притяжения между молекулами газа, приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением,  $a$  характеризует силы межмолекулярного притяжения.

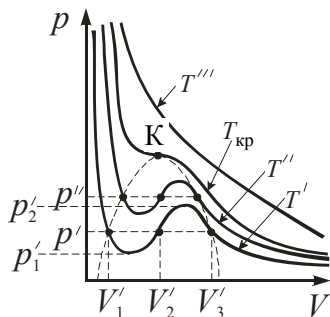


Рис. 2.4

Поправка  $b$  – это поправка на так называемый недоступный объем, равный учетверенному объему всех молекул.

Для произвольного количества вещества с учетом того, что  $V = \nu V_M$ :

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b') = \nu RT, \quad (2.39)$$

где  $a' = a\nu^2$ ,  $b' = b\nu$  – *постоянные Ван-дер-Ваальса* для  $\nu$  молей.

Исходя из уравнения (2.39) можно построить изотермы. Так как уравнение Ван-дер-Ваальса представляет собой уравнение

третьей степени относительно объема  $V$ , то оно дает одно или три вещественных значения  $V$  в зависимости от  $p$  и  $T$ .

Графически теоретические изотермы Ван-дер-Ваальса представлены на рис. 2.4, где зависимость  $p$  от  $V$  дана для различных температур.

При температуре  $T'$  и давлениях в пределах от  $p'_1$  до  $p'_2$  уравнение (2.39) имеет три вещественных корня. Различие между тремя вещественными решениями при повышении температуры уменьшается. Начиная с определенной для каждого вещества температуры  $T_{кр}$  при любом давлении вещественным оказывается только одно решение. Температура  $T_{кр}$  называется *критической* (точка К на рис. 2.4).

При температурах выше критической изотермы имеют форму, близкую к гиперболе  $pV = \text{const}$ , и описывают газообразное состояние вещества (почти идеальный газ).

При температурах ниже критической изотермы имеют сложную форму и могут заходить даже в область отрицательных давлений.

Так ли действительно ведет себя газ? Ответ на этот вопрос дает эксперимент. Для того, чтобы получить изотерму опытным путем, нужно взять вещество в газообразном состоянии и начать медленно сжимать (в сосуде с поршнем), делая одновременно отсчеты давления и объема, а также следя за тем, чтобы температура вещества оставалась постоянной. Результаты подобных опытов при температуре ниже критической приведены на рис. 2.5.

Вначале с уменьшением объема давление газа растет, причем ход изотермы достаточно хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Однако, начиная с некоторого объема  $V_{г}$ , экспериментальная изотерма перестает следовать уравнению (2.39). Начиная с этого значения объема давление в сосуде перестает изменяться, само же вещество при этом перестает быть однородным: часть газа конденсируется в жидкость. Происходит расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную. По мере дальнейшего уменьшения объема все большая часть вещества переходит в жидкую фазу, причем переход происходит при постоянном давлении, обозначенном на рис. 2.5  $p_{н.п.}$ . После того как процесс конденсации

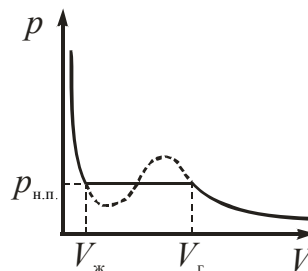


Рис. 2.5

вещества в жидкость заканчивается (это происходит при достижении объема  $V_{ж}$ ), дальнейшее уменьшение объема начинает сопровождаться быстрым ростом давления. При этом ход изотермы снова примерно следует уравнению Ван-дер-Ваальса (2.39). Вещество в состояниях, соответствующих этому участку, снова будет однородным, но представлять собой не газ, а жидкость.

Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса не только описывает газообразное состояние вещества, но и охватывает также процесс перехода в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Сопоставление экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса показывает, что эти изотермы хорошо совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества, но ведут себя различным образом в области расслоения на две фазы. Вместо S-образного завитка на изотерме Ван-дер-Ваальса экспериментальная изотерма имеет в этой области прямолинейный горизонтальный участок, который располагается так, что охватываемые завитком площади одинаковы (см. рис. 2.5).

В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. Газ (или пар), находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным паром*. Давление  $p_{н.п.}$ , при котором может существовать равновесие при данной температуре, называется *давлением (или упругостью) насыщенного пара*.

С повышением температуры горизонтальный участок изотермы сокращается, стягиваясь в точку при критической температуре  $T_{кр.}$ . Соответственно уменьшается различие в плотностях жидкости и насыщенного пара. При критической температуре это различие полностью исчезает. Одновременно исчезает всякое различие между жидкостью и паром. При температурах выше критической понятие насыщенного пара теряет смысл. При этих температурах ни при каких давлениях сжимать газ нельзя. Отсюда вытекает условие сжижения газов: для превращения газа в жидкость необходимо сжимать газ при температурах ниже критической.

### ***Примеры решения задач***

**№ 1.** Чему равна энергия вращательного движения всех молекул, содержащихся в 10 моль азота, при температуре 10 °С?

Д а н о:  $\nu = 10$  моль,  $T = 10$  °С = 283 К.

**Р е ш е н и е.** Азот – двухатомный газ, его молекула имеет пять степеней свободы ( $i = 5$ ), из них две вращательные степени ( $i_{\text{вр}} = 2$ ).

На одну степень свободы приходится энергия  $\langle \varepsilon_{\text{ст}} \rangle = \frac{1}{2} kT$ . Энергия

вращательного движения молекулы  $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT = kT$ . Число молекул

$N = \nu \cdot N_A$ , где  $N_A$  – число Авогадро. Полная энергия вращательного движения всех молекул

$$W_{\text{вр}} = N \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \nu N_A kT = \nu RT = 10 \cdot 8,31 \cdot 283 = 23,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

**№ 2.** Найдите среднюю квадратичную скорость молекул воздуха при температуре  $17^\circ\text{C}$ .

**Д а н о:**  $T = 17^\circ\text{C} = 290 \text{ К}$ ,  $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$ .

**Р е ш е н и е.** Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул определяется по формуле

$$\langle \varepsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{m_{\text{мол}} v_{\text{ср.кв}}^2}{2}.$$

Отсюда находим среднюю квадратичную скорость молекул:

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\text{мол}}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot N_A \cdot kT}{m_{\text{мол}} \cdot N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 290}{0,029}} = 499 \text{ м/с.}$$

**№ 3.** Баллон емкостью  $20 \text{ л}$  заполнен кислородом при температуре  $300 \text{ К}$ . Когда часть кислорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на  $100 \text{ кПа}$ . Определите массу  $\Delta m$  израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

**Д а н о:**  $V = 20 \text{ л} = 0,02 \text{ м}^3$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ,  $\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$ ,  $\Delta p = 100 \text{ кПа}$ .

**Р е ш е н и е.** Запишем для начального и конечного состояний кислорода в баллоне уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT.$$

Вычтем из первого уравнения второе:  $(p_1 - p_2)V = \frac{(m_1 - m_2)}{\mu} RT$ ,

или  $\Delta p V = \frac{\Delta m}{\mu} RT$ , откуда

$$\Delta m = \frac{\Delta p V \mu}{RT} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,02 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 300} = 0,0257 \text{ кг.}$$

**№ 4.** Какова была начальная температура воздуха, если при нагревании его на 3 К объем увеличился на 1% от первоначального?

Д а н о:  $T_2 = T_1 + 3$ ,  $V_2 = 1,01V_1$ .

Р е ш е н и е. Из условия задачи можно сделать предположение, что давление воздуха постоянно, т.е. происходит изобарный процесс. Уравнение изобарного процесса:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{1,01 \cdot V_1}{T_1 + 3} \Rightarrow 1,01T_1 = T_1 + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,01T_1 = 3 \Rightarrow T_1 = 300 \text{ К.}$$

**№ 5.** Азот массой 5 г, находящийся в закрытом сосуде объемом 4 л при температуре 20 °С, нагревают до температуры 40 °С. Найдите давления газа до и после нагревания.

Д а н о:  $m = 5 \cdot 10^{-3}$  кг,  $V = 4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>,  $T_1 = 293$  К,  $T_2 = 313$  К,  $\mu = 0,028$  кг/моль.

Р е ш е н и е. Из уравнения Менделеева – Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  находим давление до нагревания:

$$p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V_1} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 293}{0,028 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 109 \cdot 10^3 \text{ Па.}$$

Поскольку процесс изохорный ( $V = \text{const}$ ), то  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ , откуда

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 109 \cdot 10^3 \frac{313}{293} = 116 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

## 2.2. Термодинамика

### 2.2.1. Термодинамическая система

*Термодинамика* первоначально возникла как наука о превращении теплоты в работу. Однако законы, лежащие в основе термодинамики, имеют настолько общий характер, что в настоящее время термодинамические методы с большим успехом применяются для исследования многочисленных физических и химических процессов и для изучения свойств вещества и излучения.

При изучении свойств и процессов превращения вещества термодинамика не рассматривает микроскопическую картину явлений. В основе термодинамики лежат общие принципы, являющиеся обобщением опытных данных.

Объектом исследования термодинамики является *термодинамическая система* (ТДС) – совокупность макроскопических тел, обменивающихся энергией как между собой, так и с внешними телами. Напомним, что макроскопическое тело – это тело, состоящее из очень большого числа атомов и молекул. Примером термодинамической системы может служить газ, заключенный в цилиндр под поршнем.

Параметры состояния ТДС не всегда имеют определенные значения (например, при нагреве в разных частях системы температура разная). Состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения, называется *неравновесным*.

Термодинамические системы, которые не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом, называются *изолированными (замкнутыми)*.

Если систему, находящуюся в неравновесном состоянии, изолировать, т.е. предоставить самой себе, то она перейдет в *равновесное состояние* (когда все параметры состояния имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени). Такой переход называется процессом *релаксации*.

*Термодинамический процесс* – переход системы из одного состояния в другое.

Бесконечно медленный процесс состоит из последовательности равновесных состояний, так как параметры состояния успевают выровняться по всей системе. Такой процесс называется *равновесным (квазистатическим)*.

При изменении направления равновесного процесса (например, при замене сжатия расширением) система будет проходить те же равновесные состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. Следовательно, равновесные процессы *обратимы*.

*Круговым процессом* (или *циклом*) называется такой процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние.

## 2.2.2. Внутренняя энергия, работа и теплота.

### Первое начало термодинамики

Всякая термодинамическая система в любом состоянии обладает некоторой энергией: кинетической энергией системы как целого, потенциальной энергией во внешнем поле сил и внутренней энергией. В термодинамике обычно рассчитывают макроскопически неподвижные системы, не подверженные действию внешних полей. Для таких систем значения полной и внутренней энергии совпадают. Поэтому понятие внутренней энергии является одним из основных в термодинамике.

*Внутренняя энергия* системы  $U$  равна сумме всех видов энергий движения и взаимодействия частиц, составляющих данную систему. Например, внутренняя энергия газообразной системы включает в себя:

- кинетическую энергию поступательного и вращательного движения молекул;
- кинетическую энергию колебательного движения атомов в молекуле;
- потенциальную энергию взаимодействия молекул между собой и атомов внутри молекулы;
- внутриатомную энергию (энергию электронных оболочек атомов; энергию движения и взаимодействия нуклонов в ядрах атомов и т.д.).

Внутренняя энергия – однозначная функция состояния системы, ее значение не зависит от того, каким образом система пришла в данное состояние, т.е. не зависит от вида процесса перехода.

Подобно потенциальной энергии в механике, внутренняя энергия может быть количественно определена только с точностью до постоянного слагаемого  $U_0$ , зависящего от выбора «начала отсчета» внутренней энергии, т.е. от выбора состояния, в котором внутреннюю энергию системы принимают равной нулю. Однако значение  $U_0$  несущественно, так как в термодинамических расчетах приходится определять не абсолютное значение  $U$ , а не зависящее от  $U_0$  изменение этой энергии  $\Delta U$  в различных термодинамических процессах. По той же причине под внутренней энергией обычно понимают те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых процессах. Так, например, в дальнейшем мы будем касаться процессов, не сопровождающихся изменением внутриатомной энергии.



В случае идеального газа нет сил межмолекулярного взаимодействия и внутренняя энергия равна сумме энергий беспорядочного (теплового) движения всех молекул (см. соотношение (2.21)):

$$U = N \langle \varepsilon_{\text{мол}} \rangle = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (2.40)$$

*Обмен энергией* между термодинамической системой и окружающими ее телами может протекать в двух формах: макроскопической – в форме *работы* и микроскопической – в форме *теплообмена*.

Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем (рис. 2.6). Пусть газ начал медленно расширяться и переместил поршень на расстояние  $dx$ , настолько малое, что давление  $p$  можно считать неизменным. Газ действует на поршень с силой  $F = pS$  и совершает при расширении над поршнем элементарную работу

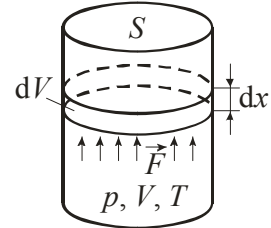


Рис. 2.6

$$dA = Fdx = pSdx = pdV,$$

где  $dV$  – приращение объема газа.

Работа, совершаемая газом при конечных изменениях объема, вычисляется путем суммирования элементарных работ:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (2.41)$$

Геометрический смысл интеграла – площадь, поэтому работу газа при изменении объема можно представить как площадь криволинейной трапеции в координатах  $(p, V)$  (рис. 2.7).

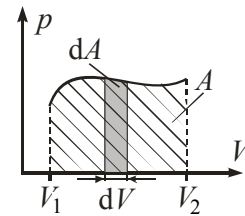


Рис. 2.7

*Работа  $A$*  – это количественная мера изменения энергии термодинамической системы при ее переходе из одного состояния в другое. Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, воздействующих на систему (например, перемещение поршня, закрывающего заключенный в сосуде газ). Таким образом, работа представляет собой процесс передачи энергии упорядоченного движения. Совершение работы над системой приводит к увеличению ее внутренней энергии.

*Теплота  $Q$  (количество теплоты)* – это тоже количественная мера изменения энергии термодинамической системы при переходе ее из одного состояния в другое. Однако теплообмен представляет

собой процесс, не связанный с макроскопическим перемещением взаимодействующих тел. Этот процесс передачи энергии неупорядоченного движения от одних тел к другим осуществляется за счет обмена энергией непосредственно между хаотически движущимися частицами тел. Например, при соприкосновении холодного и горячего газов молекулы нагретого газа при случайных столкновениях передают энергию молекулам холодного газа. Суть теплопередачи состоит в том, что отдельные молекулы более нагретого тела совершают положительную работу над молекулами менее нагретого тела.

Теплопередача может осуществляться путем обмена электромагнитным излучением. Например, вода в море прогревается днем за счет излучения, посылаемого Солнцем.

В реальных условиях оба способа передачи энергии термодинамической системе (в форме работы и теплоты) сопутствуют друг другу. Например, при нагревании тела расширяются и совершают работу над внешними телами.

Количество теплоты и работа – это функции процесса. Поэтому говорить о «запасе тепла» или о «запасе работы» в системе бессмысленно.

Все три величины – энергия, работа и теплота в СИ измеряются в *джоулях*,  $[U] = [A] = [Q] = \text{Дж}$ .

При совершении одним телом работы  $A$  над другим, равно как и при сообщении одним телом другому теплоты  $Q$ , эти тела обмениваются внутренней энергией: энергия одного из тел увеличивается, а энергия другого на столько же уменьшается. Это следует из закона сохранения энергии. В термодинамике этот закон называется первым законом (началом) термодинамики и записывается следующим образом:

$$Q = \Delta U + A, \quad (2.42)$$

где  $Q$  – количество теплоты, подведенное к системе;  $\Delta U$  – изменение (приращение) внутренней энергии системы,  $\Delta U = U_2 - U_1$ ;  $A$  – работа системы над внешними телами.

*Количество теплоты, сообщенное системе, идет на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.*

Это также означает, что невозможно создать действующий механизм, который совершал бы работу, превышающую получаемую им

энергию. Воображаемый механизм, совершающий работу, большую получаемой энергии, называется *вечным двигателем первого рода*. Тогда можно сформулировать первое начало термодинамики следующим образом: *вечный двигатель первого рода невозможен*.

### 2.2.3. Теплоемкость и внутренняя энергия идеального газа

Передача тепловой энергии телам, как правило, сопровождается изменением их температуры. Для характеристики способности тел повышать свою температуру за счет полученного извне тепла вводится понятие теплоемкости.

*Теплоемкость* – скалярная физическая величина, характеризующая связь между количеством сообщенного системе тепла и изменением ее температуры. Различают полную, удельную и молярную теплоемкости.

*Теплоемкость тела*  $C_{\text{тела}}$  (полная теплоемкость,  $[C_{\text{тела}}] = \text{Дж/К}$ ) численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, чтобы повысить ее температуру на один градус:

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}. \quad (2.43)$$

*Удельная теплоемкость*  $c$  ( $[c] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ) – теплоемкость единицы массы:

$$c = \frac{dQ}{m dT}. \quad (2.44)$$

*Молярная теплоемкость*  $C$  ( $[C] = \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ) – теплоемкость одного моля:

$$C = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (2.45)$$

Учитывая, что  $\nu = \frac{m}{\mu}$ , из сопоставления формул (2.44) и (2.45) следует:

$$c = \frac{C}{\mu}. \quad (2.46)$$

Теплоемкость зависит от условий, при которых происходит нагрев тела. В зависимости от характера процесса различают теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении.

Учитывая, что при изохорном процессе работа не совершается, для молярной теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$  можно записать:

$$C_V = \left. \frac{dQ}{\nu dT} \right|_{V=\text{const}} = \frac{dU}{\nu dT},$$

откуда  $dU = \nu C_V dT$ .

Опытным путем установлено, что для газов, близких к идеальным,  $C_V = \text{const}$  в широком интервале температур, тогда

$$U = \nu C_V \int dT = \nu C_V T + \text{const}.$$

Поскольку внутренняя энергия определяется с точностью до константы, окончательно получаем:

$$U = \nu C_V T. \quad (2.47)$$

Записав дифференциал от уравнения состояния (2.12) для идеального газа при неизменном давлении, получим выражение для элементарной работы при  $p = \text{const}$ :  $dA = pdV = \nu R dT$ . Тогда для молярной теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  получаем:

$$C_p = \left. \frac{dQ}{\nu dT} \right|_{p=\text{const}} = \frac{dU}{\nu dT} + \frac{dA}{\nu dT} = C_V + \frac{\nu R dT}{\nu dT},$$

или

$$C_p = C_V + R. \quad (2.48)$$

Соотношение (2.47) называется *уравнением Майера*. Оно показывает, что молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении больше его молярной теплоемкости при постоянном объеме на величину универсальной газовой постоянной  $R$ . Следовательно,  $C_p$  всегда больше  $C_V$ , так как в изобарном процессе в отличие от изохорного теплота, сообщаемая газу, расходуется не только на изменение его внутренней энергии, но также и на совершение газом работы. Сопоставляя (2.47) с первым началом термодинамики, получаем физическое содержание универсальной газовой постоянной  $R$ : это физическая величина, численно равная работе расширения одного моля идеального газа в изобарном процессе при нагревании его на один градус.

Введем характерную для каждого газа величину  $\gamma$ , равную отношению теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad (2.49)$$

откуда

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (2.50)$$

Тогда для внутренней энергии (2.47) можно записать:

$$U = \frac{\nu RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (2.51)$$

Молекулярно-кинетическая теория позволяет установить связь между теплоемкостью идеального газа и числом степеней свободы молекул (*классическая теория теплоемкости идеального газа*). Для внутренней энергии идеального газа справедливы соотношения (2.40) и (2.47):

$$U = \nu C_V T = \frac{i}{2} \nu RT,$$

откуда

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad (2.52)$$

а с учетом (2.48) и (2.49):

$$C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad (2.53)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (2.54)$$

В табл. 2.1 приведены значения  $C_V$ ,  $C_p$  и  $\gamma$ , получающиеся для различных молекул по этим формулам.

Таблица 2.1

Число атомов в молекуле	Характер связи между атомами	Число степеней свободы			$i$	$C_V$	$C_p$	$\gamma$
		поступат.	вращат.	колебат.				
1	—	3	—	—	3	$\frac{3R}{2}$	$\frac{5R}{2}$	1,67

Число атомов в молекуле	Характер связи между атомами	Число степеней свободы			$i$	$C_V$	$C_p$	$\gamma$
		поступат.	вращат.	колебат.				
2	Жесткая	3	2	–	5	$\frac{5R}{2}$	$\frac{7R}{2}$	1,40
2	Упругая	3	2	1	7	$\frac{7R}{2}$	$\frac{9R}{2}$	1,29
>2	Жесткая	3	3	–	6	$\frac{6R}{2}$	$\frac{8R}{2}$	1,33

В действительности теплоемкость имеет сложную зависимость от температуры и числа степеней свободы. Согласие между теорией и экспериментом можно признать удовлетворительным только для одно- и двухатомных молекул в оценочных задачах.

#### 2.2.4. Адиабатический и политропические процессы

##### *Адиабатический процесс*

*Адиабатическим (адиабатным)* называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой:  $Q = 0$ .

Из первого закона термодинамики для таких процессов справедливо:

$$\Delta U + A = 0,$$

т.е. система может совершать работу только за счет своей внутренней энергии:

$$A = -\Delta U.$$

К адиабатическим можно отнести все быстротекающие процессы.

Линию, изображающую адиабатический процесс, называют *адиабатой*. Уравнение адиабаты идеального газа (уравнение Пуассона) можно получить из уравнения Менделеева – Клапейрона и первого закона термодинамики:

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (2.55)$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (2.56)$$

откуда видно, что величина  $\gamma$  – показатель адиабаты.

На рис. 2.8 приведена адиабата (сплошная линия) в координатах  $(p, V)$ . По сравнению с изотермой (пунктирная линия) скорость убывания адиабаты с увеличением объема выше, так как  $\gamma > 1$ .

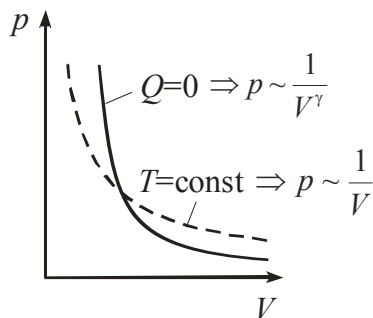


Рис. 2.8

### Полиτροпические процессы

Полиτροпические процессы – это процессы, в ходе которых теплоемкость тела остается постоянной:

$$C = \text{const.} \quad (2.57)$$

Можно показать (с помощью уравнения Менделеева – Клапейрона и первого закона термодинамики), что данные процессы описываются следующими уравнениями:

$$pV^n = \text{const}, \quad (2.58)$$

или

$$TV^{n-1} = \text{const}, \quad (2.59)$$

где

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}. \quad (2.60)$$

Уравнения (2.58) и (2.59) называются уравнениями полиτροпы, а  $n$  – показателем полиτροпы.

Все рассмотренные ранее изопроцессы являются частными случаями полиτροпических процессов. В табл. 2.2 указаны значения  $n$  и  $C$ , при которых полиτροпический процесс оказывается тождественным с одним из изопроцессов.

Таблица 2.2

Параметры	Изопроцессы			
	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$Q = 0$	$V = \text{const}$
$n$	0	1	$\gamma$	$\infty$
$C$	$C_p$	$\infty$	0	$C_v$

## **Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах**

Работа, которая совершается при переходе из состояния 1 в состояние 2 каким-либо телом над внешними телами, определяется соотношением (2.41):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Давление связано с объемом уравнением состояния (2.12):  $pV = \nu RT$ .

Вычислим работу для различных изопроцессов:

а) для изохорного

$$V = \text{const} \Rightarrow A_{12} = 0; \quad (2.61)$$

б) для изобарного

$$p = \text{const} \Rightarrow A_{12} = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1); \quad (2.62)$$

в) для изотермического

$$T = \text{const} \Rightarrow A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad (2.63)$$

г) для адиабатического

$$Q = 0 \Rightarrow A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2.$$

Используя соотношение (2.51) для внутренней энергии, получаем:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} - \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (2.64)$$

Для политропического процесса получается такое же выражение, если вместо  $\gamma$  подставить  $n$ .

### **2.2.5. Энтропия**

Казалось бы, в изолированной термодинамической системе возможны любые процессы, в ходе которых сохраняется внутрен-



няя энергия. Однако это не так. Дело в том, что различные состояния, отвечающие одной и той же энергии, обладают разной вероятностью. Естественно, что изолированная система будет самопроизвольно переходить из менее вероятных в более вероятные состояния либо пребывать преимущественно в состоянии, вероятность которого максимальна.

Например, пусть в одной из половин изолированного, разделенного перегородкой сосуда имеется газ, а в другой половине сосуда – вакуум. Если убрать перегородку, газ распространится на весь сосуд. Теплота к сосуду не подводилась, газ, расширяясь в вакуум, работы не совершал. Следовательно, не изменилась и внутренняя энергия, т.е.  $T = \text{const}$ . Обратный процесс, в результате которого газ самопроизвольно собрался бы в одной из половин сосуда, невозможен. Это обусловлено тем, что вероятность состояния, при котором молекулы газа распределены примерно поровну между обеими половинами сосуда, очень велика, а вероятность второго состояния практически равна нулю.

В литре воздуха при нормальных условиях содержится примерно  $3 \cdot 10^{22}$  молекул. Вероятность того, что они распределены поровну между половинами сосуда, в  $10^{10^{22}}$  раз больше вероятности того, что все они окажутся с одной стороны.

Заметим, что процесс распространения газа на весь объем – необратимый. Следовательно, *необратимым является процесс, обратный которому маловероятен.*

Чтобы определить, какие процессы могут протекать в изолированной системе, нужно знать вероятности различных состояний этой системы. Величина, которая служит для характеристики вероятности состояний, получила название *энтропии*. Она является функцией состояния системы.

В идеале самым детальным описанием состояния системы было бы задание координат и импульсов (или скоростей) всех частиц, из которых образована система. Столь детально охарактеризованное состояние системы называется *микросостоянием*.

Состояние системы может быть также задано с помощью макроскопических параметров (параметров состояния), характеризующих систему в целом. Охарактеризованное таким способом состояние системы называется *макросостоянием*.

Если система находится в равновесии, то параметры состояния не изменяются, т.е. не изменяется ее макросостояние. Вместе с тем частицы движутся и изменяют свой импульс в результате соударений, следовательно, микросостояние все время изменяется.

Число различных микросостояний, посредством которых осуществляется данное макросостояние, называется *статистическим весом* макросостояния  $\Omega$ .

Например, статистический вес моля кислорода при атмосферном давлении и комнатной температуре  $\Omega = 10^{6,5 \cdot 10^{24}}$ .

В основе статистической физики лежит гипотеза, согласно которой *все микросостояния равновесной термодинамической системы равновероятны*, следовательно, вероятность макросостояния пропорциональна статистическому весу. Тогда в качестве энтропии как величины, характеризующей вероятность состояния, можно было бы взять сам статистический вес. Но это неудобно не только по причине огромных чисел, но и ввиду его неаддитивности (вероятности перемножаются):  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$ . Но логарифм статистического веса – величина аддитивная:

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 .$$

Поэтому, в качестве энтропии можно принять величину  $\sigma$ , равную натуральному логарифму статистического веса:

$$\sigma = \ln \Omega .$$

Поскольку энтропия является функцией состояния системы, то она может быть представлена в виде функции параметров состояния.

В статистической физике доказывается, что при обратимом процессе величина  $dQ/kT$  является полным дифференциалом энтропии  $\sigma$ :

$$d\sigma = \left( \frac{dQ}{kT} \right)_{\text{обр}} ,$$

где  $dQ$  – количество теплоты, полученное системой в ходе обратимого процесса;  $k$  – коэффициент Больцмана;  $T$  – температура системы (и нагревателя, так как единственный обратимый процесс, при котором может передаваться теплота – изотермический).

Огромные численные значения величины  $\sigma$  делают ее мало-пригодной для практических расчетов. По этой причине энтропией называют величину  $S = k \sigma$  ( $[S] = \text{Дж/К}$ ):

$$S = k \ln \Omega. \quad (2.65)$$

В примере со статистическим весом моля кислорода при атмосферном давлении и комнатной температуре  $\Omega = 10^{6,5 \cdot 10^{24}}$ . При этом для сравнения:  $\sigma = 1,5 \cdot 10^{25}$ ;  $S = 200 \text{ Дж/К}$ . Определение энтропии (2.65) лежит в основе ее статистического применения.

Для приращения энтропии при обратимом процессе

$$dS = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{\text{обр}}, \quad (2.66)$$

при этом для обратимого процесса справедливо тождество:

$$\oint_{\text{обр}} \frac{dQ}{T} = 0.$$

Соотношение (2.66) лежит в основе термодинамического применения энтропии.

Свойства энтропии:

1. Переход системы из менее вероятного состояния в более вероятное сопровождается увеличением статистического веса  $\Omega$ , а следовательно, и энтропии  $S$ , поэтому можно утверждать, что *в ходе необратимого процесса энтропия изолированной системы возрастает*:  $dS > 0$ .

2. *Энтропия изолированной системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна*:  $\Omega = \text{const} \Rightarrow dS = 0 \Rightarrow S = \text{const}$ .

3. *Энтропия неизолированной системы может как возрастать, так и убывать*; состояние, осуществляемое многими способами, называется беспорядочным или случайным, поэтому энтропия – мера беспорядка в системе.

4. *При стремлении абсолютной температуры к нулю энтропия любого тела также стремится к нулю*:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (2.67)$$

Свойства 1 и 2 составляют *второе начало термодинамики*. Свойство 4 называется *теоремой Нернста* (ее иногда называют третьим началом термодинамики).

Выражение (2.66) определяет не саму энтропию, а разность ее значений в двух состояниях. Нернст доказал теорему (2.67), которая дает возможность определить само значение энтропии в любом состоянии. Согласно теореме Нернста энтропия любого тела при абсолютном нуле равна нулю. На этом основании энтропия в состоянии с температурой  $T$  может быть представлена следующим образом:

$$S = \int_0^T \frac{dQ}{T}. \quad (2.68)$$

Если известна, например, теплоемкость тела при данных условиях как функция температуры, то энтропия может быть вычислена по формуле

$$S = \int_0^T \frac{C(T)dT}{T}. \quad (2.69)$$

### 2.2.6. КПД тепловой машины. Цикл Карно

Создание и развитие термодинамики было вызвано прежде всего необходимостью описания работы и расчета тепловых машин. *Тепловая машина* (или *тепловой двигатель*) – это периодически действующий механизм, совершающий работу за счет получаемого извне количества теплоты. Круговой процесс (*цикл*) такого двигателя схематично показан на рис. 2.9.

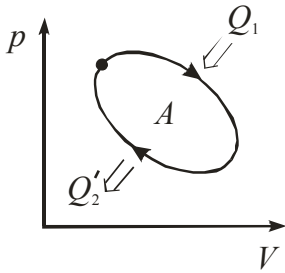


Рис. 2.9

Принцип действия тепловых машин заключается в следующем. Термостат (термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры) с более высокой температурой  $T_1$  (называемый нагревателем) передает за цикл рабочему телу теплоту  $Q_1$ , вызывая повышение его температуры. Рабочее тело совершает за цикл работу  $A$  над каким-либо механическим устройством, например приводит во вращение турбину, и далее отдает холодильнику (термостату с более низкой температурой  $T_2$ ) теплоту  $Q_2'$ , возвращаясь в исходное состояние. Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой в координатах  $(p, V)$ . Величина  $Q_2 = -Q_2'$  пред-

ставляет собой количество теплоты, передаваемое холодильником рабочему телу, и имеет отрицательное значение, т.е. для того, чтобы машина работала повторными циклами, часть полученной от нагревателя теплоты нужно отдать холодильнику.

В соответствии с первым началом термодинамики (2.42) при осуществлении кругового процесса из-за возвращения рабочего тела в исходное состояние его внутренняя энергия за цикл не изменяется. Поэтому совершенная рабочим телом механическая работа равна разности подведенной и отведенной теплоты:

$$A = Q_1 - Q_2'. \quad (2.70)$$

Эффективность тепловой машины принято характеризовать коэффициентом полезного действия  $\eta$ , который определяется как отношение совершенной за цикл работы  $A$  к получаемой от нагревателя за цикл теплоте  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} < 1. \quad (2.71)$$

Если цикл направить в другую сторону, то получится холодильная машина. Такая машина отбирает за цикл от холодного тела количество тепла  $Q_2$  и отдает горячему телу количество тепла  $Q_1'$ . Над машиной за цикл должна быть совершена работа  $A'$ . Ее эффективность характеризуется холодильным коэффициентом:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1' - Q_2}. \quad (2.72)$$

Французский инженер Сади Карно вывел теорему, которая называется его именем: *из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим КПД обладают обратимые машины, т.е.*

$$\eta_{\text{необр}} < \eta_{\text{обр}}. \quad (2.73)$$

Единственным обратимым процессом, при котором может подводиться теплота, является изотермический, поэтому обратимый цикл, совершаемый в тепловой машине рабочим телом, может состоять из изотерм и адиабат.

Цикл (рис. 2.10), состоящий из двух

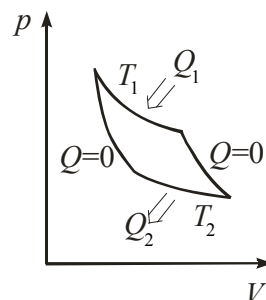


Рис. 2.10

изотерм и двух адиабат, называется *циклом Карно* – это цикл идеальной тепловой машины. КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника:

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.74)$$

В качестве примера приведем зависимость КПД идеальной тепловой машины от температуры нагревателя при температуре холодильника 20 °С (комнатная температура):

$T_1, \text{°C}$	100	400	800	1200	2500
$\eta, \%$	21	56	73	80	89

### 2.2.7. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики не дает никаких указаний относительно направления, в котором могут протекать процессы в природе. Оно не запрещает, например, самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему, хотя в природе такие процессы не наблюдаются. Обобщение огромного экспериментального материала привело к необходимости расширения термодинамики: было сформулировано второе начало. Оно позволяет судить о направлении процессов, которые могут происходить в действительности.

Наиболее очевидная формулировка второго начала термодинамики принадлежит Р. Клаузиусу (1850): *невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему.*

Формулировка В. Томсона (лорда Кельвина) (1851): *невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты в эквивалентную ей работу.*

Иными словами: *невозможен вечный двигатель второго рода – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты.*

Используя понятие энтропии, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон неубывания энтропии замкнутой системы: *энтропия изолированной системы не может убывать при любых происходящих в ней процессах:*

$$dS \geq 0, \quad (2.75)$$

причем знак равенства относится к обратимым процессам, а неравенства – к необратимым.

Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя произвольным образом.

Статистическое определение энтропии (2.65) позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: возрастание энтропии означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния. Таким образом, второе начало, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

В середине XIX в. возникла проблема так называемой тепловой смерти Вселенной. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел его содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т.е. наступит полное тепловое равновесие, и все процессы во Вселенной прекратятся – наступит тепловая смерть Вселенной.

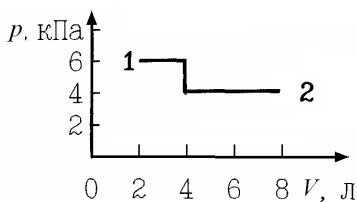
Попытка избежать указанного противоречия гипотезы тепловой смерти Вселенной была предпринята Больцманом, который показал, что и в состоянии термодинамического равновесия наблюдаются флуктуации термодинамических параметров. Если считать, что наблюдаемая Вселенная является следствием такой флуктуации, то противоречия парадокса тепловой смерти Вселенной снимаются.

Ошибочность вывода о тепловой смерти заключается в том, что бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная.

Подобно тому как в основе механики лежат законы Ньютона и все задачи могут быть решены с их помощью, в основе термодинамики лежат два закона – два начала термодинамики.

Первое начало термодинамики утверждает тот факт, что в любых процессах должен соблюдаться закон сохранения и превращения энергии, т.е. первое начало представляет собой формулировку закона сохранения и превращения энергии применительно к тепловым процессам. Второе начало уточняет первое и показывает направление протекания всех процессов – стремление любой системы перейти из менее вероятных в более вероятные состояния.

### Примеры решения задач



**№ 1.** Газ перешел из состояния 1 в состояние 2. Какую работу он при этом совершил?

**Р е ш е н и е.** Работа газа

$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ . В координатах  $p$ - $V$  рабо-

та газа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком и осью  $V$ . Исходя из этого,  $A = 6 \cdot 10^3 \cdot (4 - 2) \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^3 \cdot (8 - 4) \cdot 10^{-3} = 12 + 16 = 28$  Дж.

**№ 2.** В цилиндре под невесомым поршнем находится воздух массой 3 кг. Температура воздуха увеличивается на 100 К при постоянном давлении. Найдите работу газа при расширении. Масса моля воздуха 0,029 кг.

**Д а н о:**  $m = 3$  кг,  $\Delta T = 100$  К,  $\mu = 0,029$  кг/моль,  $p = 100$  кПа.

**Р е ш е н и е.** При  $p = \text{const}$  работа газа  $A = p\Delta V$ . Из уравнения Менделеева – Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  следует:

$$A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R \cdot \Delta T = \frac{3}{0,029} \cdot 8,31 \cdot 100 = 86 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

**№ 3.** Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа  $A = 2$  кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал изобарно.

**Р е ш е н и е.** По первому началу термодинамики  $Q = A + \Delta U$ . Для двухатомной молекулы число степеней свободы  $i = 5$ . Поэтому изменение внутренней энергии идеального двухатомного газа

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T.$$

При  $p = \text{const}$  из уравнения Менделеева – Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  следует:

$$\nu R \Delta T = p\Delta V = A.$$

$$\text{Тогда } Q = A + \frac{5}{2} A = \frac{7}{2} A = \frac{7}{2} \cdot 2 = 7 \text{ кДж.}$$



**№ 4.** Молярная масса некоторого газа  $\mu = 0,03$  кг/моль,  $c_p/c_V = 1,4$ . Найдите удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_V$  этого газа.

**Решение.** Из формулы  $\frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}$  находим число степеней свободы молекулы:  $\frac{i+2}{i} = 1,4 \Rightarrow i = 5$ , т.е. имеем дело с двухатомным газом.

Удельные теплоемкости газа находим по формулам:

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu} \text{ и } c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu}.$$

$$\text{Отсюда } c_p = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8,31}{0,03} = 969,9 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad c_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{0,03} = 692,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**№ 5.** Идеальный двухатомный газ, находящийся при давлении  $p_1 = 2$  МПа и температуре  $27^\circ\text{C}$ , адиабатически сжимается в 2 раза. Найдите давление и температуру газа после сжатия.

**Дано:**  $p_1 = 2$  МПа,  $T_1 = 27^\circ\text{C} = 300$  К,  $V_2 = 0,5V_1$ .

**Решение.** Для идеального двухатомного газа ( $i = 5$ ) находим показатель адиабаты:  $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$ .

Запишем уравнения Пуассона для двух состояний адиабатного процесса:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \text{ и } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Подставив  $V_2 = 0,5V_1$  в первое уравнение, получим:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 \frac{V_1^\gamma}{2^\gamma} \Rightarrow p_2 = p_1 \cdot 2^\gamma = 2 \cdot 2^{1,4} = 2^{2,4} = 5,3 \text{ МПа}.$$

Подставив  $V_2 = 0,5V_1$  во второе уравнение, получим:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 \frac{V_1^{\gamma-1}}{2^{\gamma-1}} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot 2^{\gamma-1} = 300 \cdot 2^{0,4} = 396 \text{ К}.$$

**№ 6.** Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты  $4,2$  кДж, совершил работу  $590$  Дж. Найдите термический КПД цикла  $\eta$ . Во сколько раз температура нагревателя  $T_n$  больше температуры  $T_x$  холодильника?

**Дано:**  $Q_n = 4,2$  кДж,  $A = 590$  Дж.

Р е ш е н и е. Термический КПД цикла определяется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{590}{4200} = 0,14.$$

Для идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно,  $\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$ . Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H} \Rightarrow \frac{T_X}{T_H} = 1 - \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - A}{Q_H},$$

$$\frac{T_H}{T_X} = \frac{Q_H}{Q_H - A} = \frac{4200}{4200 - 590} = 1,16.$$

**№ 7.** Кусок олова массой 1 кг, находящийся при температуре 300 К, расплавили. Определите приращение энтропии при плавлении олова.

Д а н о:  $m = 1$  кг,  $T_0 = 300$  К; температура плавления олова  $T_{\text{пл}} = 505$  К, удельная теплоемкость олова  $c = 230$  Дж/(кг·К); удельная теплота плавления олова  $\lambda = 58\,600$  Дж/кг (см. приложение, табл. П.4).

Р е ш е н и е. Для того чтобы расплавить олово, нужно провести два процесса: нагрев от  $T_0$  до  $T_{\text{пл}}$  и само плавление при  $T_{\text{пл}}$ . Для нагрева

$$\Delta S_H = \int_{T_0}^{T_{\text{пл}}} \frac{Q}{T} dT = \int_{T_0}^{T_{\text{пл}}} \frac{cm}{T} dT = cm \ln \frac{T_{\text{пл}}}{T_0}.$$

Для плавления при  $T = T_{\text{пл}} = \text{const}$  приращение энтропии

$$\Delta S_{\text{пл}} = \frac{\lambda m}{T_{\text{пл}}}.$$

Полное изменение энтропии  $\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_{\text{пл}} = cm \ln \frac{T_{\text{пл}}}{T_0} + \frac{\lambda m}{T_{\text{пл}}}$ ;

$$\Delta S = 230 \cdot 1 \cdot \ln \frac{505}{300} + \frac{58600 \cdot 1}{505} = 119,8 + 116 = 235,8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

### 3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Электродинамика* – раздел физики, в котором изучаются электромагнитные взаимодействия.

*Электромагнитное взаимодействие* – одно из четырех выделяемых в настоящее время фундаментальных взаимодействий, это взаимодействие между электрически заряженными частицами или макроскопическими заряженными телами.

*Электрический заряд*  $q$  – физическая величина, характеризующая свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия. Единица заряда – кулон,  $[q] = \text{Кл}$ .

#### 3.1. Электростатика

*Электростатика* – раздел электродинамики, в котором рассматриваются свойства и взаимодействия неподвижных в инерциальной системе отсчета электрически заряженных тел или частиц, обладающих электрическим зарядом.

##### 3.1.1. Электрический заряд и его свойства

###### *Электрический заряд*

Электрические заряды бывают двух видов. Их условно назвали *положительными* и *отрицательными*. Заряды взаимодействуют между собой: одноименные – отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Носителями зарядов являются *элементарные частицы* (мельчайшие частицы материи).

Наименьший встречающийся в природе электрический заряд называется *элементарным зарядом*  $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$  Кл. Элементарные частицы: *электрон*, *протон* и *нейтрон* – несут заряды  $-e$ ,  $+e$ ,  $0$  соответственно. Из этих частиц построены атомы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел.

Обычно электроны и протоны имеются в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, вследствие чего каждый такой объем (и тело в целом) оказываются нейтральными.

Всякий заряд образуется совокупностью элементарных зарядов, поэтому он является целым кратным  $e$ :

$$q = \pm N e. \quad (3.1)$$

Если физическая величина может иметь только дискретные (т.е. разделенные конечными промежутками) значения, говорят, что эта величина квантуется; *электрический заряд квантуется*.

Электрические заряды могут возникать и исчезать. Однако всегда возникают или исчезают одновременно два одинаковых заряда разных знаков.

#### Примеры:

1. Электрон и *позитрон* (*антиэлектрон*) при встрече *аннигилируют*, т.е. превращаются в нейтральные частицы, называемые *гамма-фотонами*. При этом исчезают заряды  $+e$  и  $-e$ .

2. В ходе процесса, называемого *рождением пары*, гамма-фотон при определенных условиях превращается в пару частиц – электрон и позитрон.

Таким образом, существует закон сохранения электрического заряда: *суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться*.

### **Закон Кулона**

*Точечный заряд* – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

Закон взаимодействия точечных зарядов установил экспериментально Шарль Огюстен Кулон в 1785 г. с помощью изобретенных им крутильных весов: *сила  $F$  взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, находящихся в вакууме, направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, пропорциональна величинам зарядов  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:*

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}, \quad (3.2)$$

где коэффициент пропорциональности  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ .

Для вектора силы, действующей со стороны первого заряда на второй (рис. 3.1), получается соотношение:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.3)$$

где  $\vec{e}_r$  – единичный направляющий вектор,  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ .

Пусть кроме заряда  $q$  имеются еще заряды  $q_1, q_2, \dots, q_N$  (рис. 3.2). Тогда результирующая сила  $\vec{F}$ , с которой на  $q$  действуют все  $N$  зарядов, определяется формулой

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) отражает *принцип суперпозиции сил* и является обобщением опытных фактов.

Во многие формулы электродинамики входит множитель  $4\pi$ , поэтому  $k$  иногда удобно представить в виде  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Рационализованная запись закона Кулона:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.5)$$

Всякий заряд возбуждает в окружающем его пространстве *электростатическое поле (ЭСП)*, которое проявляет себя в том, что на помещенный в какую-либо его точку заряд действует сила.

Можно отметить аналогию закона Кулона (3.2) и закона всемирного тяготения (1.29). Заряды взаимодействуют посредством электростатического поля так же, как массы взаимодействуют посредством гравитационного поля.

### 3.1.2. Напряженность электростатического поля

Исследуем поле неподвижного точечного заряда  $q$  с помощью точечного пробного заряда  $q'$  (рис. 3.3). В соответствии с законом Кулона на пробный заряд будет действовать сила

$$\vec{F} = q' \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right).$$

Отношение  $\vec{F}/q'$  не зависит от величины заряда  $q'$ , следовательно, является характеристикой поля. *Напряженность  $\vec{E}$  элек-*

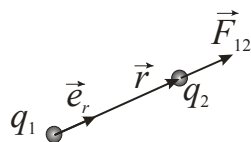


Рис. 3.1

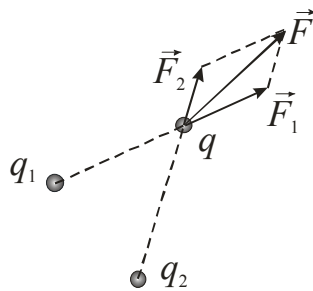


Рис. 3.2

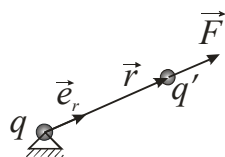


Рис. 3.3

трического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \quad (3.6)$$

Направление вектора  $\vec{E}$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Единица измерения напряженности в СИ – *вольт на метр*,  $[E] = \text{В/м}$ .

Из соотношений (3.4) и (3.6) следует, что поля складываются, не возмущая друг друга:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (3.7)$$

Это следствие называется *принципом суперпозиции напряженностей*.

Из закона Кулона (3.5) и определения напряженности (3.6) можно найти напряженность поля точечного заряда:

$$\vec{E}_{\text{точ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.8)$$

Поле называется *однородным*, если вектор  $\vec{E}$  одинаков в каждой точке.

### 3.1.3. Энергия взаимодействия зарядов

#### *Работа поля по перемещению заряда*

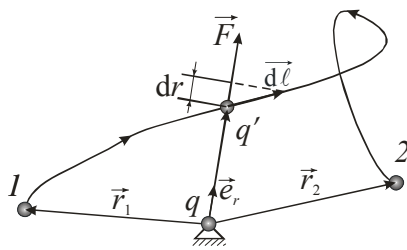


Рис. 3.4

Пусть точечный заряд  $q'$ , находящийся в поле неподвижного точечного заряда  $q$ , переместился вдоль некоторой траектории из положения 1 в положение 2 (рис. 3.4). Найдем работу  $A_{12}$ , совершаемую при этом над зарядом  $q'$  силами поля, в котором он находится. На заряд  $q'$

действует сила  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{e}_r$ .

Элементарная работа этой силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{\ell},$$

где  $\vec{d\ell}$  – элементарное перемещение заряда  $q'$ . Из рис. 3.4 видно, что  $\vec{e}_r \cdot \vec{d\ell} = dr$  – приращение расстояния между зарядами. Для работы на участке 1–2 получается выражение

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r_2}, \quad (3.9)$$

откуда следует, что работа силы не зависит от пути, по которому перемещался заряд  $q'$ , а зависит лишь от начального и конечного положений заряда. Работа по произвольной замкнутой траектории равна нулю (т.е. сила Кулона потенциальна):  $\oint_{\ell} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \oint_{\ell} q' \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$ ,

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0. \quad (3.10)$$

Выражение  $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$  называется *циркуляцией вектора  $\vec{E}$*  по контуру  $\ell$ .

Соотношение (3.10) выражает теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$ : *циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю*. Если циркуляция векторной характеристики некоторого поля равна нулю, то говорят, что поле потенциально (условие потенциальности).

Работа потенциальных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии (см. (1.90)):

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2}. \quad (3.11)$$

Сопоставив (3.9) и (3.11), получим для потенциальной энергии, которой обладает заряд  $q'$  в поле заряда  $q$ , выражение

$$W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r} + \text{const.}$$

На бесконечно большом расстоянии заряды не взаимодействуют, следовательно потенциальная энергия при  $r = \infty$  должна обращаться в нуль:

$$W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r}. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) можно трактовать как взаимную потенциальную энергию зарядов  $q$  и  $q'$ , находящихся на расстоянии  $r$ .

### **Потенциал**

Скалярная величина

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q'} \quad (3.13)$$

не зависит от величины заряда  $q'$  и может быть использована для характеристики поля заряда  $q$ . Эта величина называется *потенциалом поля* в данной точке.

Из сказанного выше следует, что потенциал поля точечного заряда  $q$  определяется выражением

$$\varphi_{\text{точ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (3.14)$$

где  $r$  – расстояние от заряда до данной точки поля.

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (3.15)$$

Из определения потенциала (3.13) следует, что заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией

$$W_{\text{п}} = q \varphi. \quad (3.16)$$

Таким образом, работу сил поля над зарядом  $q$  можно выразить через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = q (\varphi_1 - \varphi_2) = q U, \quad (3.17)$$

где  $U$  – *напряжение*;  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$ . Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на убыль потенциала.

Единица измерения потенциала (и напряжения) – *вольт*,  $[\varphi] = [U] = \text{В}$ . Один вольт соответствует потенциалу в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного од-



ному кулону, нужно совершить работу в один джоуль:  
 $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$ .

В физике часто пользуются единицей работы и энергии, называемой *электронвольт* (эВ) и равной работе, совершаемой силой поля над элементарным зарядом  $e$  при прохождении им разности потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

В быту же используется единица работы *киловатт-час* (кВт·ч):

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

### ***Связь напряженности и потенциала***

Электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}$  (силовой характеристики поля), либо с помощью скалярной величины  $\phi$  (энергетической характеристики поля). Очевидно, что эти величины должны быть как-то связаны друг с другом.

При перемещении точечного заряда  $q$  вдоль некоторого направления на отрезок  $\vec{d\ell}$  силы поля совершат над ним работу

$$dA = q \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = q E_{\ell} d\ell,$$

где  $E_{\ell}$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление перемещения.

Иначе эту работу можно выразить через убыль потенциала:

$$dA = -q d\phi = -q (\partial\phi / \partial\ell) d\ell.$$

Приравняв оба выражения для работы, получим соотношение  $q E_{\ell} d\ell = -q (\partial\phi / \partial\ell) d\ell$ , откуда следует, что

$$E_{\ell} = -\frac{\partial\phi}{\partial\ell}. \quad (3.18)$$

Таким образом, проекция вектора  $\vec{E}$  на произвольное направление равна изменению потенциала на единицу длины вдоль этого направления.

Взяв в качестве направления координатные оси  $x, y, z$ , получим выражения для компонент вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (3.19)$$

Для однородного поля или для оценочных расчетов можно записать:

$$E = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ell} = \frac{U}{\ell}, \quad (3.20)$$

откуда становится понятной единица измерения напряженности вольт на метр.

### Графическое изображение полей

Электростатическое поле можно изобразить с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

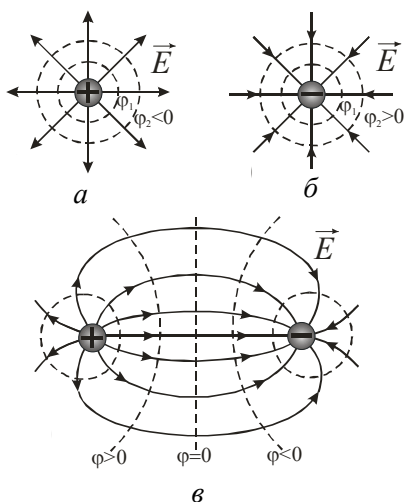


Рис. 3.5

для положительного точечного заряда (а), отрицательного точечного заряда (б) и диполя (в).

Диполь – система двух равных по модулю, но противоположных по знаку зарядов, находящихся на малом расстоянии друг от друга.

*Силовые линии* – воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке поля. Они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, не пересекаются.

*Эквипотенциальная поверхность (линия)* – поверхность (линия) равного потенциала.

На рис. 3.5 изображены силовые (сплошные) и эквипотенциальные (пунктирные) линии для положительного точечного

### 3.1.4. Поток напряженности электрического поля.

#### Теорема Гаусса

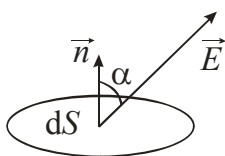


Рис. 3.6

Элементарный поток  $d\Phi_{\vec{E}}$  вектора  $\vec{E}$  через поверхность площадью  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$  (рис. 3.6) определяется по формуле

$$d\Phi_{\vec{E}} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E \cos \alpha dS = E_n dS, \quad (3.21)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности (внешняя для замкнутых поверхностей).

Для произвольной поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{E}$

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S E_n dS. \quad (3.22)$$

Напряженность поля точечного заряда определяется выражением (3.8). Линии поля в этом случае представляют собой центрально-симметричную систему радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (см. рис. 3.5, *a* и *б*).

Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность радиусом  $r$ , в центре которой помещается положительный точечный заряд  $q$ . В каждой точке этой поверхности  $E_n = (1/4\pi\epsilon_0)q/r^2$ . Следовательно, поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Это выражение не зависит от радиуса поверхности  $r$ . Это означает, что число линий поля на любом расстоянии от заряда одно и то же. Отсюда вытекает, что линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются; начавшись на положительном заряде, они заканчиваются на отрицательном заряде (в нашем случае на бесконечности). Источниками электростатического поля могут служить только заряды, причем мощность этих источников равна  $q/\epsilon_0$ .

Обобщив полученный результат на случай произвольного числа зарядов любого знака, приходим к теореме Гаусса: *поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$* :

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q. \quad (3.23)$$

Для заряда, распределенного по телу некоторым образом, используется понятие плотности электрического заряда.

*Объемная плотность заряда*  $\rho$  (Кл/м<sup>3</sup>) – заряд в единице объема; *поверхностная плотность заряда*  $\sigma$  (Кл/м<sup>2</sup>) – заряд на единице площади; *линейная плотность заряда*  $\tau$  (Кл/м) – заряд на единице длины:

$$\rho = \frac{dq}{dV}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \tau = \frac{dq}{dl}. \quad (3.24)$$

С помощью теоремы Гаусса можно рассчитать поля заряженных тел, обладающих элементами симметрии: поле бесконечно однородно заряженной плоскости; поле однородно заряженного бесконечного цилиндра; поле однородно заряженной сферы или шара.

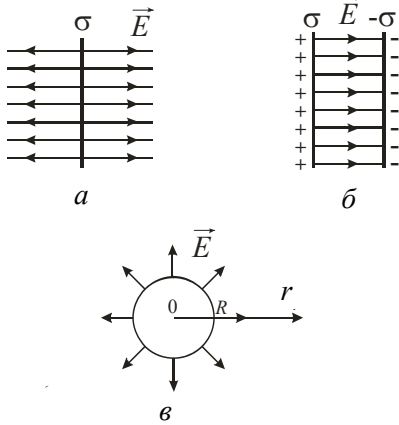


Рис. 3.7

Пример 1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  оказывается однородным (рис. 3.7, а):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.25)$$

Пример 2. Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей с поверхностными плотностями заряда  $\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 3.7, б) можно найти, используя принцип суперпозиции (3.7). Между плоскостями поля имеют одинаковое направление, слева и справа от плоскостей – противоположные, поэтому, напряженность оказывается отличной от нуля только между плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.26)$$

Пример 3. Поле равномерно заряженной сферы радиусом  $R$  оказывается таким же, как и у точечного заряда вне сферы (рис. 3.7, в). Внутри поле отсутствует, так как там нет зарядов и силовым линиям негде было бы оканчиваться. Пусть  $q$  – заряд сферы, тогда:

$$E_r = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & \text{если } r > R. \end{cases} \quad (3.27)$$

С использованием (3.18) можно показать, что зависимость потенциала от расстояния вне сферы будет такая же, как у точечного заряда. Внутри потенциал такой же, как на поверхности, так как внутри поля нет:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & \text{если } r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & \text{если } r > R. \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.1.5. Электростатическое поле в диэлектриках

*Диэлектрики (изоляторы)* – вещества, в которых заряды не могут перемещаться упорядоченно.

Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных ядер и движущихся вокруг них отрицательно заряженных электронов. У диэлектриков заряды, входящие в состав молекулы, прочно связаны друг с другом и могут быть разъединены только при воздействии на них очень сильного поля. Поэтому заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными. Под действием внешнего поля связанные заряды разных знаков лишь немного смещаются в противоположные стороны; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.

*Связанные заряды* – это заряды, входящие в состав молекулы и прочно соединенные друг с другом.

Внутри или на поверхности диэлектрика могут находиться заряды, которые не входят в состав его молекул. Такие заряды, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, мы будем называть *сторонними*.

*Сторонние (свободные) заряды* – это заряды, не входящие в состав молекул диэлектрика.

В зависимости от взаимного расположения зарядов разных знаков наблюдаются два типа молекул. У молекул одного типа центры положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга. Такие молекулы называются *полярными* (HCl, H<sub>2</sub>O). У молекул другого типа, называемых *неполярными*, вследствие их симметрии центры положительных и отрицательных зарядов совпадают (H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>).

Полярные молекулы подобны электрическому диполю.

*Электрический диполь* – система двух отличающихся только знаком точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расстояние  $\ell$  между которыми мало по сравнению с расстояниями до тех точек, в которых рассматривается поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется *осью диполя*. Ориентацию оси диполя в пространстве можно задать с помощью вектора  $\vec{\ell}$ , проведенного от заряда  $-q$  к заряду  $+q$ .

*Электрический момент диполя (дипольный момент)*

$$\vec{p} = q \vec{\ell}. \quad (3.29)$$

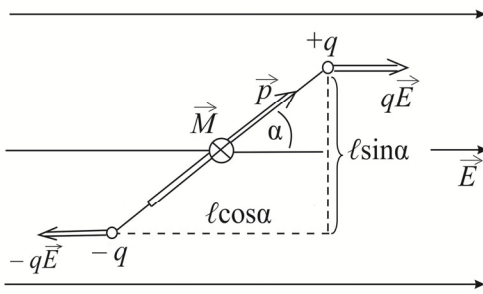


Рис. 3.8

Если диполь находится в однородном электрическом поле (рис. 3.8), на его заряды действуют равные по модулю, противоположно направленные силы  $+q\vec{E}$  и  $-q\vec{E}$ . Эти силы образуют пару, плечо которой равно  $\ell \sin \alpha$ . Модуль момента пары сил равен произведению силы на плечо:

$$M = qE\ell \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (3.30)$$

Вращающий момент  $\vec{M}$  перпендикулярен к векторам  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ ;  $\alpha$  есть угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ . Поэтому можно написать:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (3.31)$$

Таким образом, однородное электрическое поле оказывает на диполь ориентирующее действие, стремясь установить его по полю.

Под действием внешнего электрического поля полярные и неполярные молекулы ведут себя по-разному. На полярные молекулы поле в основном оказывает ориентирующее действие, стремясь установить их дипольными моментами по полю. Величину дипольного момента полярной молекулы поле существенно не изменяет. Ориентирующему действию поля на полярные молекулы противится тепловое движение, которое стремится разбросать моменты молекул равномерно по всем направлениям. В результате противоборства этих двух тенденций устанавливается преимущественная ориентация дипольных моментов по полю, тем большая, чем сильнее поле и чем

ниже температура. Это приводит к тому, что вещество в целом приобретает электрический дипольный момент или, как говорят, *поляризуется*. Такой вид поляризации называется *ориентационной поляризацией*.

Действие поля на неполярную молекулу приводит к тому, что центр положительных зарядов смещается в направлении поля, а центр отрицательных зарядов – в противоположную сторону. В результате неполярная молекула приобретает *индуцированный (наведенный)* дипольный момент, точно ориентированный по полю. Такая поляризация называется *электронной*. Экспериментально установлено, что взаимное смещение центров зарядов, а следовательно, и дипольный момент пропорциональны напряженности поля, т.е. силе, действующей на заряды. В этом отношении неполярная молекула сходна с пружиной, удлинение которой пропорционально приложенной к ней силе. По этой причине неполярные молекулы называются *упругими диполями*. Соответственно полярные молекулы называют *жесткими диполями*.

Независимо от типа молекул диэлектрики под действием внешнего поля приобретают дипольный момент. Это явление называется *поляризацией диэлектрика*.

В качестве количественной характеристики поляризации естественно взять дипольный момент единицы объема диэлектрика, который называется *поляризованностью* диэлектрика и обозначается буквой  $\vec{P}$  (Кл/м<sup>2</sup>):

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}. \quad (3.32)$$

Поляризованный диэлектрик становится источником электрического поля  $\vec{E}'$ , которое накладывается на поле сторонних зарядов  $\vec{E}_0$ . В итоге возникает поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (3.33)$$

Молекулы испытывают действие суммарного поля  $\vec{E}$ . Поэтому и поляризованность диэлектрика определяется этим полем. Опыт показывает, что независимо от типа молекул в не слишком сильных полях поляризованность большинства изотропных диэлектриков (кроме сегнетоэлектриков) пропорциональна напряженности поля в этой точке:

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.34)$$

где  $\kappa$  – не зависящая от  $\vec{E}$  характеристика диэлектрика, называемая *диэлектрической восприимчивостью*.

Электрическая постоянная  $\epsilon_0$  введена в формулу (3.34) для того, чтобы сделать диэлектрическую восприимчивость безразмерной величиной.

Если нормальная составляющая напряженности поля  $\vec{E}$  для данной поверхности отлична от нуля, то под действием поля заряды одного знака уходят внутрь, а заряды другого знака выходят наружу. В результате в тонком поверхностном слое диэлектрика возникает избыток связанных зарядов одного знака.

На поверхности тела могут располагаться не только связанные, но и сторонние заряды. Чтобы различить эти два случая, будем поверхностную плотность сторонних зарядов обозначать  $\sigma$ , а поверхностную плотность связанных зарядов – символом  $\sigma'$ , аналогично объемную плотность сторонних зарядов – символом  $\rho$ , а объемную плотность связанных зарядов – символом  $\rho'$ .

Связь поверхностной плотности связанных зарядов с поляризованностью и напряженностью такова:

$$\sigma' = P_n = \kappa \epsilon_0 E_n, \quad (3.35)$$

где  $P_n$  – проекция поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности;  $E_n$  – проекция напряженности поля внутри диэлектрика на внешнюю нормаль.

Связанные заряды, как и любые другие электрические заряды, являются источниками электрического поля, на них начинаются или оканчиваются линии напряженности  $\vec{E}$ .

Для расчета полей в диэлектриках вместо напряженности  $\vec{E}$  более удобной оказывается величина  $\vec{D}$ , силовые линии которой начинаются или оканчиваются только на сторонних зарядах:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (3.36)$$

Эта величина называется *электрическим смещением* поля (другое название: *электрическая индукция*). Связанные заряды не являются источниками поля вектора  $\vec{D}$ .

Из (3.34) и (3.36) получаем:

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (3.37)$$



где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (3.38)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* вещества. Ее определяют экспериментально. В вакууме  $\varepsilon = 1$ , в воздухе  $\varepsilon \approx 1$ , в воде  $\varepsilon = 81$ . Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется поле за счет диэлектрика.

Для электрического смещения  $\vec{D}$  также можно сформулировать теорему Гаусса: *поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности*:

$$\Phi_{\vec{D}} = \oint_S D_n dS = \sum q. \quad (3.39)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектрических сред 1 и 2 с диэлектрическими проницаемостями соответственно  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  должны удовлетворять определенным условиям, которые могут быть получены из теоремы Гаусса для  $\vec{D}$  и теоремы о циркуляции  $\vec{E}$ . Поскольку среды изотропны, из соображений симметрии следует, что векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  лежат в одной плоскости (аналогично для  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$ ).

Линии вектора  $\vec{D}$  могут начинаться или оканчиваться только на сторонних зарядах. Поэтому, если на границе раздела таких зарядов нет, линии  $\vec{D}$  проходят через границу, не прерываясь (рис. 3.9), причем их нормальные составляющие одинаковы в обоих диэлектриках (в непосредственной близости к границе раздела сред):

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (3.40)$$

Из (3.37) следует, что нормальные составляющие напряженности связаны соотношением

$$E_{1n}/E_{2n} = \varepsilon_2/\varepsilon_1. \quad (3.41)$$

Для касательных составляющих получаются соотношения:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (3.42)$$

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \varepsilon_1/\varepsilon_2. \quad (3.43)$$

Соотношения (3.40)–(3.43) определяют условия, которым удовлетворяют векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлек-

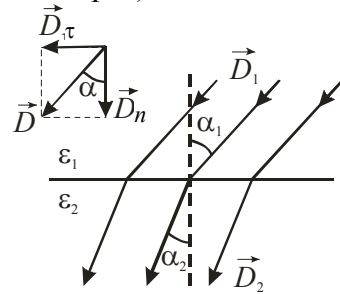


Рис. 3.9

триков. Из них вытекает, что тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  при переходе через границу раздела изменяются непрерывно. Нормальная же составляющая вектора  $\vec{E}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  при переходе через границу раздела изменяются скачком, т.е. претерпевают разрыв.

По рис. 3.9 видно, что  $\operatorname{tg}\alpha = D_\tau/D_n$ . Поэтому

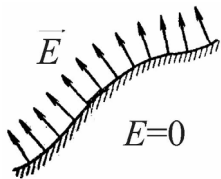
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{D_{1\tau}/D_{1n}}{D_{2\tau}/D_{2n}} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.44)$$

Это отношение выражает закон преломления линий электрического смещения (и линий напряженности поля).

### 3.1.6. Проводники в электростатическом поле

#### *Условия равновесия зарядов на проводнике*

Носители заряда в проводниках приходят в движение под действием сколь угодно малой силы. Поэтому для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение двух условий (рис. 3.10):



1) напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю:

$$E_{\text{внутр}} = 0; \quad (3.45)$$

2) напряженность поля на поверхности проводника должна в каждой точке быть направлена по нормали к поверхности:

$$E_{\text{пов}} = E_n. \quad (3.46)$$

Первое условие означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным. Из второго условия следует, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника является эквипотенциальной.

#### *Распределение зарядов на проводнике*

Сообщенный проводнику заряд распределяется по поверхности проводника (иначе внутри поле было бы отлично от нуля).

В случае полого проводника избыточный заряд также распределяется по внешней поверхности. Линиям поля, начавшимся (окончившимся) на заряде, находящемся на поверхности полости, не на чем было бы окончиться (начаться) – в теле проводника линий поля нет, а внутри полости заряды отсутствуют.

С помощью теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$  можно найти поле у поверхности заряженного проводника:

$$D_{\text{пов}} = \sigma, \quad (3.47)$$

$$E_{\text{пов}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (3.48)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

На больших расстояниях от заряженного проводника любой формы эквипотенциальные поверхности имеют характерную для поля точечного заряда форму сферы (рис. 3.11). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной.

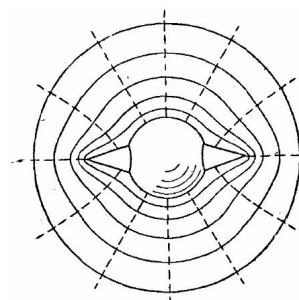


Рис. 3.11

Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, а значит, и напряженность поля здесь больше. Отсюда следует, что плотность заряда на выступах особенно велика. К такому же выводу можно прийти, учтя, что вследствие взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Плотность заряда растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) поверхности и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность заряда на остриях.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные в направлении вектора  $\vec{E}$ , отрицательные – в противоположную сторону.

В результате на концах проводника возникают заряды противоположных знаков, называемые *индуцированными зарядами* (рис. 3.12). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не окажутся выполненными условия (3.45) и (3.46), т.е. пока

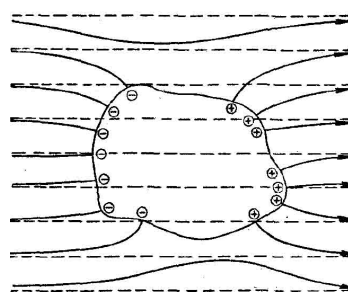


Рис. 3.12

напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника – нормальными к его поверхности.

Таким образом, незаряженный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности – они оканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами.

### *Емкость*

Сообщим некоторому уединенному проводнику заряд  $q$ . Этот заряд распределится по поверхности проводника так, чтобы выполнялись условия (3.45) и (3.46). Если сообщить проводнику еще такую порцию заряда  $q$ , она распределится по поверхности точно так же, как первая.

Это означает, что различные по величине заряды распределяются по поверхности уединенного проводника подобным образом: отношение плотностей заряда в двух произвольно взятых точках поверхности при любой величине заряда будет одним и тем же. Отсюда следует, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:  $\varphi = C q$ .

Коэффициент пропорциональности  $C$  называется *емкостью* уединенного проводника,

$$C = q / \varphi. \quad (3.49)$$

Пример. С учетом (3.28) можно найти емкость шара радиусом  $R$ , погруженного в безграничный однородный и изотропный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ :

$$C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (3.50)$$

За единицу емкости принимается емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица называется *фарадом*,  $[C] = \Phi$ . Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар радиусом  $9 \cdot 10^9$  м, т.е. радиусом, в 1500 раз большим радиуса Земли.

Емкость уединенных проводников невелика. Например, шар таких размеров, как Земля, обладает емкостью всего лишь 700 мкФ. Вместе с тем бывают нужны устройства, которые при небольшом потенциале накапливали бы на себе большие заряды. Такие устройства называются *конденсаторами*. Это два проводника (обкладки), помещенные близко друг к другу. Для того, чтобы внешние тела не влияли на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы.

Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, сторонние заряды, сообщаемые обкладкам, имеют одинаковую величину и различны по знаку.

Емкость конденсатора

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2) = q / U, \quad (3.51)$$

где  $U$  – напряжение между обкладками.

Пример. Пусть площадь обкладки плоского конденсатора равна  $S$ , а расстояние между обкладками  $d \ll S$ . Зазор между обкладками предполагается заполненным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . В этом случае напряженность поля в диэлектрике (по формуле (3.26))

$$E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon) = q / (\epsilon_0 \epsilon S) = U / d.$$

Отсюда емкость плоского конденсатора

$$C_{\text{плоск.кond}} = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}. \quad (3.52)$$

Располагая некоторым набором конденсаторов, можно получить много различных значений емкости, если применить соединенные конденсаторы в *батареи*.

При *параллельном соединении* (рис. 3.13) одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал  $\varphi_1$ , а другая  $\varphi_2$ . Поэтому на соединенных вместе обкладках накапливается суммарный заряд:

$$q = \sum q_k = \sum C_k (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k.$$

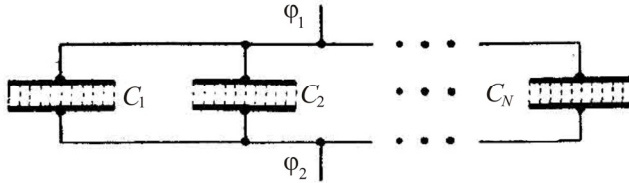


Рис. 3.13

Разделив этот заряд на приложенное к батарее напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , найдем емкость батареи:

$$C = \sum C_k = C_1 + C_2 + \dots + C_N. \quad (3.53)$$

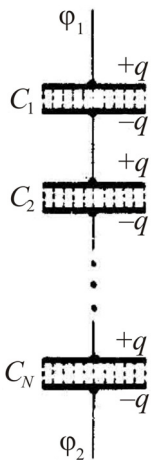


Рис. 3.14

При *последовательном соединении* (рис. 3.14) первая обкладка каждого следующего конденсатора образует со второй обкладкой предыдущего единый проводник, на котором при подключении напряжения возникают индуцированные заряды  $-q$  и  $+q$  такой же величины, как заряд  $+q$  на первой обкладке первого конденсатора и заряд  $-q$  на второй обкладке последнего конденсатора. Поэтому напряжение на каждом из конденсаторов  $U_k = q/C_k$ , а напряжение на всей батарее

$$U = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k}.$$

Отношение  $U$  к  $q$  дает величину, обратную емкости батареи  $C$ :

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}. \quad (3.54)$$

### 3.1.7. Энергия электрического поля

Ранее было показано, что кулоновские силы потенциальны. Можно показать, что потенциальная энергия взаимодействия  $N$  точечных зарядов определяется формулой

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (3.55)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал точки пространства, в которой находится заряд  $q_i$ .

Заряд  $q$ , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов  $q_i$ . Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциал точек, в которых находятся точечные заряды  $q_i$ , одинаков и равен потенциалу  $\varphi$  проводника. Энергия проводника

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{2} q \varphi.$$

С использованием определения емкости (3.49) энергия уединенного проводника

$$W_{\text{п}} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (3.56)$$

Энергия конденсатора как системы зарядов, расположенных на обкладках,

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} [(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU.$$

С использованием определения емкости (3.51) энергия конденсатора

$$W_{\text{п}} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (3.57)$$

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора через характеристики поля в зазоре между обкладками. Подстановка (3.52) в (3.57) приводит к соотношению

$$W_{\text{п}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 S d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V.$$

В плоском конденсаторе поле однородно. Поэтому энергия распределена по объему конденсатора равномерно. Следовательно, в единице объема поля содержится энергия

$$w = \frac{W_{\text{п}}}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

С учетом (3.37) полученное выражение можно представить в виде

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.58)$$

Величина  $w$  называется *объемной плотностью энергии* электрического поля.

Соотношение (3.58) получено для случая, когда поле однородно. Однако оно будет справедливо для любого электрического поля.

Зная плотность энергии в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме  $V$ . Для этого нужно вычислить интеграл:

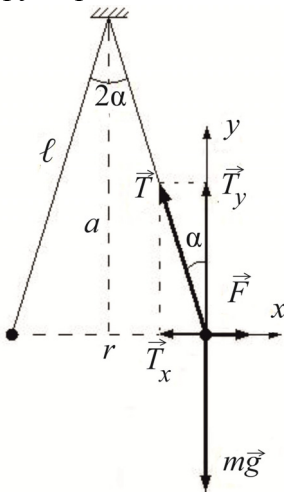
$$W_n = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (3.59)$$

### Примеры решения задач

**№ 1.** Два одинаково заряженных маленьких шарика массой по 5 г, подвешенных на шелковых нитях длиной по 1 м, отталкиваясь друг от друга, разошлись на 4 см. Найдите величину заряда каждого шарика.

Дано:  $m = 5 \cdot 10^{-3}$  кг,  $\ell = 1$  м,  $r = 0,04$  м.

Решение. Условие равновесия шариков



$$\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0.$$

В проекциях:

$$- \text{ на ось } y: F - T \sin \alpha = 0$$

$$- \text{ на ось } x: T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F \\ T \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставим силу Кулона для вакуума

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \text{ в полученное выражение. Получим:}$$

$$k \frac{q^2}{r^2} = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow q^2 = \frac{r^2 mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}{k} \Rightarrow q = r \sqrt{\frac{mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}{k}}.$$

По рисунку видно, что  $a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4\ell^2 - r^2}$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{2a} = \frac{2r}{2\sqrt{4\ell^2 - r^2}} = \frac{r}{\sqrt{4\ell^2 - r^2}} = \frac{0,04}{\sqrt{4 - 0,0016}} \approx 0,02.$$

Отсюда величина заряда каждого шарика

$$q = r \sqrt{\frac{mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}{k}} = 0,04 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,02}{9 \cdot 10^9}} = 0,04 \sqrt{\frac{10^{-12}}{9}} =$$



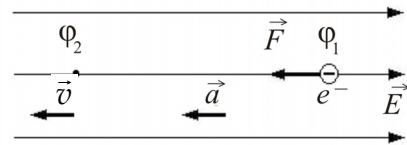
$$= 4 \cdot 10^{-2} \frac{10^{-6}}{3} = 1,33 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 13,3 \text{ нКл.}$$

**№ 2.** Электрон, находящийся в однородном электрическом поле, получил ускорение  $10^{12} \text{ м/с}^2$ . Найдите: 1) напряженность электростатического поля; 2) скорость, которую получит электрон за  $10^{-6} \text{ с}$  своего движения, если начальная скорость его равна нулю; 3) работу сил электростатического поля за это время; 4) разность потенциалов, пройденную при этом электроном.

Д а н о:  $a = 10^{12} \text{ м/с}^2$ ;  $t = 10^{-6} \text{ с}$ ;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ;  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

Р е ш е н и е. По второму закону Ньютона

$$m_e a = F.$$



Сила Кулона  $F = q_e E$ . Тогда

$$E = \frac{m_e a}{q_e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{9,1}{1,6} = 5,69 \text{ В/м.}$$

Скорость электрона  $v = at = 10^{12} \cdot 10^{-6} = 10^6 \text{ м/с}$ .

Работа электрического поля равна изменению кинетической энергии:

$$A = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{m_e v_0^2}{2} = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}}{2} = 4,55 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Выразим работу электрического поля через разность потенциалов:

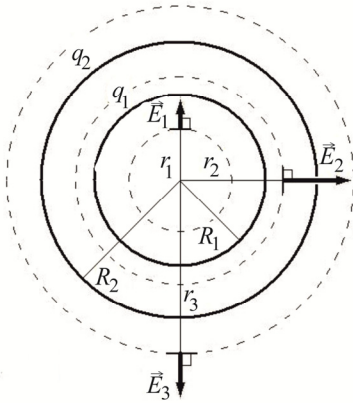
$$A = q_e(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\text{Отсюда } (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A}{q_e} = \frac{4,55 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,84 \text{ В.}$$

**№ 3.** Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусами  $R_1 = 5 \text{ см}$  и  $R_2 = 8 \text{ см}$ . Сферы имеют заряды:  $q_1 = 2 \text{ нКл}$  и  $q_2 = -1 \text{ нКл}$ . Определите напряженность электрического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях  $r_1 = 3 \text{ см}$ ,  $r_2 = 6 \text{ см}$ ,  $r_3 = 10 \text{ см}$ .

Р е ш е н и е. Используем теорему Гаусса:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^{\text{оXB}}}{\epsilon_0},$$



где  $q_i^{\text{оXB}}$  – заряды, охваченные гауссовой поверхностью. Выберем гауссову поверхность (воображаемую) в виде сферы радиусом  $r_3$ , описанной вокруг заряженных сфер. Вектор напряженности  $\vec{E}_3$  в каждой точке гауссовой поверхности перпендикулярен ей и  $|\vec{E}_3| = \text{const}$ . Поток вектора  $\vec{E}_3$  поля, созданного обеими заряженными сферами,

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E_3 dS = E_3 \oint_S dS = E_3 \cdot 4\pi r_3^2.$$

В правой части теоремы Гаусса стоит алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри воображаемой поверхности (охватываемых этой поверхностью), т.е.

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}.$$

Следовательно,  $E_3 \cdot 4\pi r_3^2 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$ ; отсюда

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} = \frac{(2-1) \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 899 \text{ В/м.}$$

Рассуждая аналогично, для сферической гауссовой поверхности радиусом  $r_2$  получаем:

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 36 \cdot 10^{-4}} = 49,95 \text{ кВ/м.}$$

Внутри гауссовой поверхности радиусом  $r_1$  заряда нет, поток  $\Phi_{\vec{E}} = 0$ , следовательно,  $E_1 = 0$ .

**№ 4.** На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $0,2 \text{ мкКл/м}^2$ . Расстояние между пластинами равно 1 мм. Насколько изменится разность по-

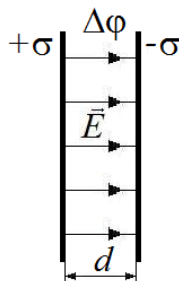
тенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до 3 мм?

Дано:  $\sigma = 0,2 \text{ мкКл/м}^2$ ,  $d_1 = 1 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 3 \text{ мм}$ .

Решение. Электроемкость конденсатора по определению  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ . Электроемкость плоского

конденсатора  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ . Приравнивая  $\frac{q}{\Delta\varphi}$  к

$\frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ , получим  $\Delta\varphi = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}$ .



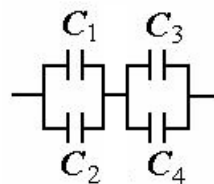
Поверхностная плотность  $\sigma = \frac{q}{S} \Rightarrow q = \sigma S$ . Следовательно, по-

лучаем:  $\Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon}$ ,  $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{\sigma d_2}{\epsilon_0 \epsilon} - \frac{\sigma d_1}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} (d_2 - d_1)$ . Если между

пластинами конденсатора воздух, то  $\epsilon = 1$ . Окончательно получим следующее изменение разности потенциалов:

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d_2 - d_1) = \frac{0,2 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} (3 - 1) \cdot 10^{-3} = 45 \text{ В.}$$

**№ 5.** Конденсаторы соединены в батарею так, как показано на рисунке. Конденсаторы имеют следующие электроемкости:  $C_1 = 0,2 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 0,1 \text{ мкФ}$ ,  $C_3 = 0,3 \text{ мкФ}$ ,  $C_4 = 0,4 \text{ мкФ}$ . Определите электроемкость  $C$  батареи конденсаторов.



Решение. Пары конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  соединены параллельно, поэтому:  $C_{1,2} = C_1 + C_2 = 0,3 \text{ мкФ}$ ,  $C_{3,4} = C_3 + C_4 = 0,7 \text{ мкФ}$ .

Исходная цепь преобразуется к цепи  $\text{---} \left[ \begin{array}{c} C_{1,2} \\ C_{3,4} \end{array} \right] \text{---}$ , где конденсаторы соединены последовательно. Отсюда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{3,4}} \Rightarrow C = \frac{C_{1,2} \cdot C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} = \frac{0,3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-12}}{(0,3 + 0,7) \cdot 10^{-6}} = 0,21 \text{ мкФ.}$$

**№ 6.** Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U = 1 \text{ кВ}$ . Расстояние  $d$  между пластинами равно 1 см. Диэлектрик – стекло ( $\epsilon = 7$ ). Определите объемную плотность энергии поля конденсатора.

Р е ш е н и е. Энергия конденсатора  $W = \frac{CU^2}{2}$ . Емкость плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ . С учетом того, что объем конденсатора  $V = Sd$ , получим:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon Sd}{d^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon V}{d^2}.$$

Тогда  $W = \frac{\epsilon_0 \epsilon V U^2}{2d^2}$ .

Объемная плотность энергии поля конденсатора вычисляется по формуле:  $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon U^2}{2d^2} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,31 \text{ Дж/м}^3$ .

### 3.2. Постоянный электрический ток

#### 3.2.1. Характеристики и условия существования постоянного тока

*Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока могут быть *электроны*, а также положительные и отрицательные *ионы*, т.е. атомы или молекулы, потерявшие либо присоединившие к себе один или несколько электронов. За положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов.

Носители тока находятся в беспорядочном тепловом движении со скоростью  $v \sim 10^6$  м/с. Через воображаемую площадку переносится в обоих направлениях одинаковый заряд, и ток отсутствует. При наличии электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение носителей – ток (подобно тому, как в газе на хаотическое тепловое движение молекул накладывается их упорядоченное движение – ветер).

Отношение заряда, проходящего через некоторую воображаемую поверхность (например, через поперечное сечение проводника), ко времени прохождения является скалярной величиной и называется *силой тока*:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{3.60}$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется *постоянным*. Единицей силы тока является *ампер*,  $[I] = \text{А}$ .

Электрический ток может быть распределен по сечению, через которое он течет, неравномерно. В этом случае более детально ток можно охарактеризовать с помощью векторной величины  $\vec{j}$ , называемой *плотностью тока*. Чтобы определить плотность тока в некоторой точке пространства, нужно взять в этой точке элементарную площадку  $dS_{\perp}$ , перпендикулярную к направлению упорядоченного движения носителей тока. Разделив силу тока  $dI$ , текущего через эту площадку, на  $dS_{\perp}$ , получим модуль плотности тока ( $\text{А}/\text{м}^2$ ):

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (3.61)$$

За направление вектора  $\vec{j}$  принимается направление скорости  $\vec{u}$  упорядоченного движения положительных носителей тока.

Поле вектора  $\vec{j}$  можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся так же, как и линии любого векторного поля. Линии постоянного тока замкнуты.

Если задано поле вектора плотности тока, можно вычислить силу тока, текущего через любую воображаемую поверхность  $S$ . Для этого нужно разбить  $S$  на элементарные участки  $dS$ , через которые текут токи:

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS,$$

где  $j_n$  – проекция  $\vec{j}$  на нормаль к  $dS$ .

Просуммировав токи через все площадки, получим силу тока, текущего через поверхность  $S$ :

$$I = \int_S j_n dS. \quad (3.62)$$

Следовательно, сила тока равна потоку вектора плотности тока через заданную поверхность (рис. 3.15).

Пример. В металлах носителями тока являются электроны. Зная концентрацию  $n$  (число свободных электронов в единице объема) и скорость упорядоченного движения носителей  $u$ , можно получить выражение для силы тока:

$$I = neuS. \quad (3.63)$$

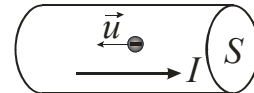


Рис. 3.15

Скорость упорядоченного движения носителей тока *и* невелика. Например, у одного из лучших проводников – меди – при предельно допустимой техническими нормами плотности тока она составляет примерно 1 мм/с.

Для возникновения и поддержания в проводниках тока проводимости на заряженные частицы должны действовать силы, обеспечивающие их упорядоченное перемещение в течение конечного промежутка времени.

Кулоновские силы электростатического взаимодействия зарядов приводят к такому их распределению в проводнике, при котором напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, а потенциалы всех точек проводника одинаковы. Поэтому электростатическое поле кулоновских сил не может обеспечить постоянного электрического тока в проводнике.

Для того чтобы в проводнике мог существовать постоянный ток проводимости, необходимо выполнение следующих условий:

а) напряженность электрического поля в проводнике должна быть отлична от нуля и не должна изменяться с течением времени;

б) цепь постоянного тока проводимости должна быть замкнутой;

в) на свободные электрические заряды помимо кулоновских сил должны действовать неэлектростатические силы, называемые *сторонними силами*. Сторонние силы могут быть созданы *источниками тока*.

За счет сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока в направлении, противоположном действию сил электростатического поля. Благодаря этому на концах внешней цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи идет постоянный электрический ток. Работа, которая необходима для обеспечения упорядоченного движения электрических зарядов в проводнике при прохождении по нему постоянного электрического тока, совершается за счет энергии источника тока.

Работа по перемещению заряда по проводнику в процессе протекания по нему электрического тока совершается кулоновскими и сторонними силами, т.е. полная работа  $A = A^{\text{кул}} + A^{\text{ст}}$ .

Полная работа, которая совершается при перемещении единичного положительного заряда на участке 1–2 электрической цепи, по которой протекает постоянный ток (рис. 3.16),

$$A_{12} / q = A_{12}^{\text{кул}} / q + A_{12}^{\text{ст}} / q.$$

При этом  $A_{12}^{\text{кул}} / q = \varphi_1 - \varphi_2$  (см. формулу (3.17)).

Электродвижущей силой  $\mathcal{E}_{12}$  (ЭДС), действующей на участке 1–2 цепи, называется физическая величина, численно равная работе, которую совершают сторонние силы при перемещении на участке 1–2 единичного положительного заряда (от минуса к плюсу внутри источника тока):



Рис. 3.16

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12}^{\text{ст}}}{q} = \frac{\int_1^2 \vec{F}^{\text{ст}} \cdot d\vec{\ell}}{q} = \int_1^2 \vec{E}^{\text{ст}} \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.64)$$

где  $d\vec{\ell}$  – элементарное перемещение заряда;  $\vec{F}^{\text{ст}}$  – сторонние силы;  $\vec{E}^{\text{ст}}$  – напряженность поля сторонних сил, действующих внутри источника тока.

На рис. 3.16 также показано схематичное изображение источника тока; его характеристикой является ЭДС.

Напряжением  $U_{12}$  на участке цепи 1–2 называется физическая величина, численно равная полной работе, которая совершается кулоновскими и сторонними силами при перемещении вдоль участка цепи единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (3.65)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*, иначе – *неоднородным*.

### 3.2.2. Закон Ома

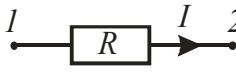
Экспериментально установлено, что *сила тока на участке цепи пропорциональна напряжению*:

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (3.66)$$

Коэффициент пропорциональности  $1/R$ , где  $R$  – *электрическое сопротивление проводника*,  $[R] = \text{Ом}$ .

Выражение (3.66) определяет закон Ома (для произвольного участка цепи).

Сопротивление проводника зависит от материала проводника, его геометрической формы, размеров и температуры. Для однородного цилиндрического проводника длиной  $\ell$  и площадью поперечного сечения  $S$  сопротивление можно представить в виде



$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (3.67)$$

Рис. 3.17 где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление,  $[\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м}$ .

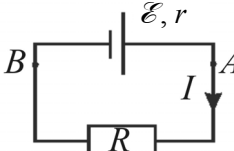
Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной электропроводностью (проводимостью)* проводника:  $\gamma = 1/\rho$ . На рис. 3.17 показано схематичное изображение электрического сопротивления в цепи.

Следствия:

1. *Закон Ома для однородного участка цепи:*

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \quad (3.68)$$

2. *Закон Ома для замкнутой электрической цепи (рис. 3.18):*



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (3.69)$$

где  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.  
Напряжение во внешней цепи (см. рис. 3.18)

Рис. 3.18 
$$U_{AB} = \mathcal{E} - Ir. \quad (3.70)$$

Если полная электрическая цепь содержит несколько последовательно соединенных источников тока, то ЭДС, действующая в цепи, равна алгебраической сумме ЭДС отдельных источников тока:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i. \quad (3.71)$$

3. *Закон Ома в дифференциальной (локальной) форме для каждой точки проводника:*

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}. \quad (3.72)$$

### 3.2.3. Правила Кирхгофа

В основе расчета разветвленных электрических цепей лежат два *правила Кирхгофа*, которые позволяют рассчитать токи на участках цепи. *Разветвленная цепь* – цепь, содержащая узлы. *Узлами*



называются точки, в которых сходятся более чем два проводника. *Участок цепи* – цепь между двумя узлами. *Контур* – любая замкнутая цепь в разветвленной цепи. Перед применением правил Кирхгофа на участках цепи произвольным образом указываются направления токов.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов): *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

$$\sum I_k = 0. \quad (3.73)$$

При этом току, текущему к узлу, приписывается один знак, а току, текущему от узла, – другой знак. Уравнение (3.73) можно написать для всех  $N$  узлов. Однако независимыми будут только  $(N - 1)$  уравнение.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров): *для произвольного, мысленно выделенного в разветвленной цепи, замкнутого контура алгебраическая сумма произведений токов на участках цепи на их сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС источников тока в этом же контуре:*

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k. \quad (3.74)$$

При этом предварительно выбирается положительное направление обхода по контуру (например, по часовой стрелке), токам и ЭДС приписываются знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Если для какого-либо тока будет получено отрицательное значение, это будет означать, что в действительности он течет в противоположном направлении.

Уравнение (3.74) можно составить для всех замкнутых контуров, которые можно выделить в данной цепи. Однако независимыми будут уравнения только для тех контуров, которые нельзя получить наложением на них других контуров.

Число независимых уравнений, составленных по первому и второму правилам Кирхгофа, равно количеству токов, текущих на разных участках цепи. Поэтому если заданы ЭДС и сопротивления, то могут быть вычислены все токи.

### 3.2.4. Закон Джоуля – Ленца

Проводник при прохождении по нему тока нагревается. Дж. Джоуль и независимо от него Э.Х. Ленц установили эксперимен-

тально, что количество выделившейся в проводнике теплоты пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени:

$$Q = I^2 R t.$$

Если сила тока изменяется со временем, то

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (3.75)$$

Тепловая мощность  $P$  – количество теплоты, выделяющееся в проводнике в единицу времени:

$$P = \frac{dQ}{dt} = I^2 R. \quad (3.76)$$

С помощью закона Ома последнее соотношение можно переписать:

$$P = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}.$$

Последнее соотношение верно, если считать, что вся энергия преобразуется в тепло.

Мощность всей цепи (для замкнутой цепи вместо  $U$  нужно взять  $\mathcal{E}$ ):

$$P_{\text{цепи}} = I \mathcal{E}. \quad (3.77)$$

Удельная мощность (на единицу объема)

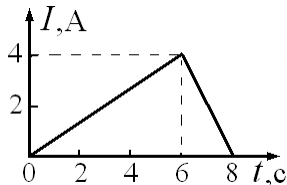
$$P_{\text{уд}} = \frac{P}{S\ell} = \frac{I U}{S \ell} = j E = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Это – закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. С помощью (3.72) его можно переписать в другом виде:

$$P_{\text{уд}} = j E = \rho j^2 = \gamma E^2. \quad (3.78)$$

### Примеры решения задач

**№ 1.** Какова величина заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за время от  $t_1 = 0$  с до  $t_2 = 8$  с, если сила тока изменяется со временем так, как показано на рисунке?



**Решение.** По определению

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I dt \Rightarrow q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

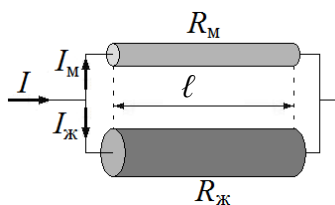
Геометрический смысл интеграла – площадь фигуры, лежащей под графиком интегрируемой функции, в нашем случае  $I(t)$ . График функции  $I(t)$  и ось  $t$  образуют треугольник, площадь которого  $q = \frac{1}{2} I_1 t_2$ . Поскольку  $I_1 = 4$  А,  $t_2 = 8$  с, то

$$q = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16 \text{ Кл.}$$

**№ 2.** Медная и железная проволоки одинаковой длины включены параллельно в цепь, причем железная проволока имеет вдвое больший диаметр. Сила тока в медной проволоке 60 мА. Какова сила тока в железной проволоке?

Д а н о :  $d_{\text{ж}} = 2d_{\text{м}}$ ;  $\rho_{\text{м}} = 17$  нОм·м,  $\rho_{\text{ж}} = 98$  нОм·м,  $I_{\text{м}} = 60$  мА.

Р е ш е н и е . При параллельном соединении проводников напряжения на них одинаковы:  $U_{\text{м}} = U_{\text{ж}}$ . По закону Ома для участка цепи:



$$I_{\text{м}} = \frac{U_{\text{м}}}{R_{\text{м}}}; I_{\text{ж}} = \frac{U_{\text{ж}}}{R_{\text{ж}}} \Rightarrow U_{\text{м}} = I_{\text{м}} R_{\text{м}}; U_{\text{ж}} = I_{\text{ж}} R_{\text{ж}},$$

тогда

$$I_{\text{м}} R_{\text{м}} = I_{\text{ж}} R_{\text{ж}} \Rightarrow I_{\text{ж}} = I_{\text{м}} \frac{R_{\text{м}}}{R_{\text{ж}}}.$$

Находим площади сечения проволок:  $S_{\text{м}} = \frac{\pi d_{\text{м}}^2}{4}$ ;  $S_{\text{ж}} = \frac{\pi d_{\text{ж}}^2}{4}$ .

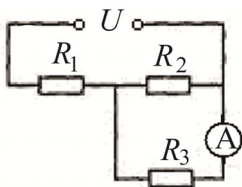
Подставляем их в формулы для сопротивления проволок:

$$R_{\text{м}} = \frac{\rho_{\text{м}} \ell}{S_{\text{м}}} = \frac{4 \rho_{\text{м}} \ell}{d_{\text{м}}^2}; R_{\text{ж}} = \frac{\rho_{\text{ж}} \ell}{S_{\text{ж}}} = \frac{4 \rho_{\text{ж}} \ell}{d_{\text{ж}}^2}.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} I_{\text{ж}} &= I_{\text{м}} \frac{R_{\text{м}}}{R_{\text{ж}}} = I_{\text{м}} \frac{4 \rho_{\text{м}} \ell}{d_{\text{м}}^2} \cdot \frac{d_{\text{ж}}^2}{4 \rho_{\text{ж}} \ell} = I_{\text{м}} \frac{\rho_{\text{м}} d_{\text{ж}}^2}{\rho_{\text{ж}} d_{\text{м}}^2} = I_{\text{м}} \frac{\rho_{\text{м}} (2d_{\text{м}})^2}{\rho_{\text{ж}} d_{\text{м}}^2} = I_{\text{м}} \frac{\rho_{\text{м}} \cdot 4}{\rho_{\text{ж}}} = \\ &= \frac{60 \cdot 10^{-3} \cdot 17 \cdot 10^{-9} \cdot 4}{98 \cdot 10^{-9}} = 41,6 \cdot 10^{-3} \text{ А.} \end{aligned}$$

**№ 3.** Замкнутая цепь включает в себя элемент, три резистора и амперметр.

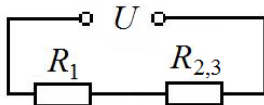


Напряжение на зажимах элемента в замкнутой цепи  $U = 2,1$  В, сопротивления резисторов  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом и  $R_3 = 3$  Ом. Какой ток  $I$  показывает амперметр?

**Решение.** Амперметр будет показывать ток через резистор  $R_3$ , который включен параллельно резистору  $R_2$ . Сначала найдем их общее сопротивление:

$$\frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2 \text{ Ом.}$$

Теперь цепь можно представить в следующем виде:



Далее найдем общее сопротивление цепи и общий ток:

$$R = R_1 + R_{2,3} = 2 + 5 = 7 \text{ Ом} \Rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{2,1}{7} = 0,3 \text{ А.}$$

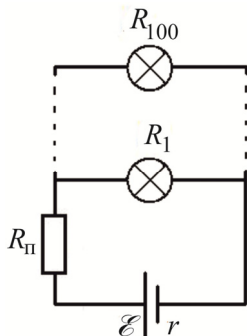
Учитывая, что  $I = I_1 = I_{2,3}$ , получим напряжение на резисторе  $R_{2,3}$ :

$$U_{2,3} = I R_{2,3} = 0,3 \cdot 2 = 0,6 \text{ В.}$$

Для напряжений на  $R_2$  и  $R_3$  (см. исходную цепь) можем написать:  $U_{2,3} = U_2 = U_3$ . Тогда амперметр показывает ток  $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ А.}$

**№ 4.** Источник тока питает 100 ламп, рассчитанных на напряжение 220 В и соединенных параллельно. Сопротивление каждой лампы 1,2 кОм, сопротивление подводящих проводов 4 Ом, внутреннее сопротивление источника 0,8 Ом. Найдите ЭДС источника.

Дано:  $U_n = 220$  В,  $R_1 = \dots = R_{100} = 1,2$  кОм,  $R_n = 4$  Ом,  $r = 0,8$  Ом.



**Решение.** Поскольку лампы имеют одинаковое сопротивление, находим их общее сопротивление:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_{100}} = \frac{100}{R_1} \Rightarrow R_n = \frac{R_1}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \text{ Ом.}$$

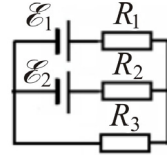
Тогда можно найти ток, текущий через лампы (он же общий ток):

$$I = \frac{U_{\text{л}}}{R_{\text{л}}} = \frac{220}{12} = \frac{55}{3} \text{ А.}$$

По закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{л}} + R_{\text{л}} + r} \Rightarrow \mathcal{E} = I(R_{\text{л}} + R_{\text{л}} + r) = \frac{55}{3}(12 + 4 + 0,8) = 308 \text{ В.}$$

**№ 5.** Источники тока с электродвижущими силами  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  включены в цепь, как показано на первом рисунке. Определите силы токов, текущих в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$ , если  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$  и  $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$ . Сопротивления источников тока пренебречь.



**Решение.** На втором рисунке показаны произвольно выбранные направления токов и направления обхода контуров (по часовой стрелке).

Для узла  $A$  напомним первое правило Кирхгофа:

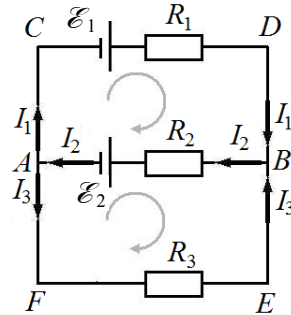
$$I_2 - I_1 - I_3 = 0.$$

Для контуров  $ACDBA$  и  $ABEFA$  применим второе правило Кирхгофа, учитывая направления токов и обхода:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2;$$

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_2.$$

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:



$$\left. \begin{aligned} I_2 - I_1 - I_3 &= 0; \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= -\mathcal{E}_2. \end{aligned} \right\}$$

Решаем данную систему методом подстановки. Для упрощения выкладок подставим в нее значения известных величин:

$$\left. \begin{aligned} I_2 - I_1 - I_3 &= 0; \\ 2I_1 + 4I_2 &= 10 - 4; \\ 4I_2 + 4I_3 &= -4. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} I_2 - I_1 - I_3 &= 0; \\ I_1 + 2I_2 &= 3; \\ I_2 + I_3 &= -1. \end{aligned} \right\}$$

Из второго и третьего уравнений выразим  $I_1$  и  $I_3$  через  $I_2$ :

$$I_1 = 3 - 2I_2; I_3 = -1 - I_2,$$

и подставим в первое уравнение:

$$I_2 - 3 + 2I_2 + 1 + I_2 = 0 \text{ или } 4I_2 = 2.$$

Отсюда находим силы токов:

$$I_2 = 0,5 \text{ А}; I_1 = 3 - 2 \cdot 0,5 = 2 \text{ А}; I_3 = -1 - 0,5 = -1,5 \text{ А}.$$

Знак « $\rightarrow$ » у тока  $I_3$  говорит о том, что направление этого тока противоположно выбранному изначально.

**№ 6.** Предохранитель из проволоки площадью сечения  $0,1 \text{ мм}^2$  и длиной  $2 \text{ см}$  плавится за  $3 \text{ мс}$  при напряжении  $10 \text{ В}$ . Начальная температура предохранителя  $27 \text{ }^\circ\text{C}$ , температура плавления  $327 \text{ }^\circ\text{C}$ . Удельное электросопротивление материала проволоки  $0,22 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$ , удельная теплота плавления  $2,5 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплоемкость  $126 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Определите массу проволоки в предохранителе.

Д а н о:  $S = 10^{-7} \text{ м}^2$ ,  $\ell = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ,  $U = 10 \text{ В}$ ,  $T_1 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 327 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 0,22 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\lambda = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$ ,  $c = 126 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

Р е ш е н и е. При коротком замыкании количество теплоты, выделившееся на предохранителе,  $Q = \frac{U^2}{R} t$ . Сопротивление предо-

хранителя  $R = \frac{\rho \ell}{S}$ . Тепло, выделившееся в предохранителе, идет на его нагрев и плавление:

$$Q = Q_{\text{н}} + Q_{\text{п}},$$

где  $Q_{\text{н}} = cm(T_2 - T_1)$ ;  $Q_{\text{п}} = \lambda m$ .

В итоге получаем уравнение:

$$cm(T_2 - T_1) + \lambda m = \frac{U^2 S}{\rho \ell} t,$$

откуда

$$m = \frac{U^2 S t}{\rho \ell (c(T_2 - T_1) + \lambda)} = \frac{10^2 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2} (126 \cdot 300 + 2,5 \cdot 10^4)} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ кг}.$$

### 3.3. Магнетизм

#### 3.3.1. Основные свойства магнитного поля

##### *Магнитное поле*

Экспериментально установлено, что электрические токи взаимодействуют между собой. Это взаимодействие осуществляется через поле, называемое *магнитным*. Название происходит от того, что, как обнаружил в 1920 г. Х.К. Эрстед, поле, возбуждаемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда проволока, по которой шел ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока вызывало поворот стрелки в противоположную сторону.

Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту величину назвали *магнитной индукцией*  $\vec{B}$ .

Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется. Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака движутся в противоположную сторону (либо покоятся). Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.

##### *Контур с током в магнитном поле*

Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный точечный заряд, для исследования магнитного поля будем использовать *пробный ток*, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров.

Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали  $\vec{n}$  к контуру, связанной с направлением тока правилом правого винта (рис. 3.19). Такую нормаль мы будем называть положительной.

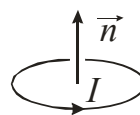


Рис. 3.19

Причина использования пробного контура с током состоит в том, что поле, возбуждаемое током, оказывает на него такое же ориентирующее действие, как и на магнитную стрелку: положительная нормаль контура разворачивается в ту же сторону, что и северный полюс магнитной стрелки. Примем это направление за направление поля, т.е. вектора  $\vec{B}$  в данной точке.

Итак, поместив пробный контур в магнитное поле, мы обнаружим, что поле устанавливает контур положительной нормалью вдоль поля. Если контур повернуть так, чтобы направления нормали и поля не совпадали, возникает вращающий момент, стремящийся вернуть контур в равновесное положение (рис. 3.20). Значение момента зависит от угла  $\alpha$  между нормалью и направлением поля: вращающий момент сил оказывается пропорциональным  $\sin \alpha$ , достигая наибольшего значения  $M_{\max}$  при  $\alpha = \pi/2$ , а при  $\alpha = 0$  момент равен нулю.

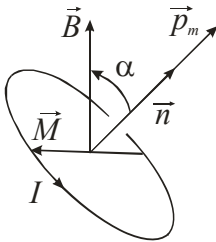


Рис. 3.20

Вращающий момент зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств контура. Внося в одну и ту же точку поля разные пробные контуры, мы обнаружим, что при фиксированном  $\alpha$  вращающий момент пропорционален силе тока  $I$  в контуре и площади  $S$  контура и совершенно не зависит от формы контура.

Таким образом, действие магнитного поля на плоский контур с током определяется величиной  $p_m = IS$ , которую называют *магнитным моментом* контура,  $[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$ .

Кроме силы тока  $I$  и площади  $S$  контур характеризуется также ориентацией в пространстве. Поэтому магнитный момент следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали  $\vec{n}$ :

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (3.79)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор.

### Магнитная индукция

На пробные контуры, отличающиеся значением  $p_m$ , действуют в данной точке разные по модулю вращающие моменты  $M$ . Однако отношение  $M/p_m$  оказывается при фиксированном  $\alpha$  одним и тем



же. Поэтому в качестве модуля магнитной индукции можно принять величину, равную отношению  $M_{\max}/p_m$ :

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}, \quad (3.80)$$

где  $M_{\max}$  – наибольшее значение вращающего момента, получающееся при  $\alpha = \pi/2$ .

Итак, магнитная индукция есть векторная величина, модуль которой определяется выражением (3.80), а направление задается равновесным положением положительной нормали к контуру с током.

Тогда модуль момента сил для произвольного угла будет определяться соотношением

$$M = p_m B \sin \alpha. \quad (3.81)$$

Вектор вращающего момента сил  $\vec{M}$  перпендикулярен векторам  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , причем его направление можно определить по *правилу буравчика*: кратчайший поворот буравчика от  $\vec{p}_m$  к  $\vec{B}$  приведет к поступательному перемещению буравчика в сторону  $\vec{M}$  (см. рис. 3.20). Таким образом, вектор момента сил  $\vec{M}$  можно представить как векторное произведение векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ :

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (3.82)$$

модуль же момента определяется соотношением (3.81).

В соответствии с (3.80) единица  $B$ , называемая *тесла* (Тл), равна магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющий магнитный момент  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , действует максимальный вращающий момент, равный  $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Экспериментально установлено, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: индукция поля  $\vec{B}$ , порождаемого несколькими движущимися зарядами (токами), равна векторной сумме индукций полей  $\vec{B}_i$ , порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (3.83)$$

### ***Закон Био – Савара – Лапласа***

Ж.Б. Био и Ф. Савар провели в 1820 г. исследование магнитных полей, создаваемых токами, текущими по тонким проводам различной

формы. П. Лаплас проанализировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и установил зависимость, которая получила название закона Био – Савара – Лапласа. Согласно этому закону *магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока.* Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока длиной  $\vec{d\ell}$ , Лаплас получил формулу

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{d\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.84)$$

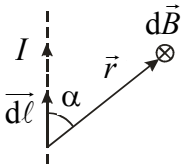


Рис. 3.21

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, где Гн (*генри*) – единица индуктивности (см. подразд. 3.3.7);  $\vec{d\ell}$  – вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в которую течет ток (рис. 3.21);  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от элемента тока в ту точку,

в которой определяется  $d\vec{B}$ ;  $r$  – модуль этого вектора. Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы  $\vec{d\ell}$  и  $\vec{r}$  (как результат векторного произведения). Направление вектора  $d\vec{B}$  можно определить по *правилу буравчика*: кратчайший поворот буравчика от  $\vec{d\ell}$  к  $\vec{r}$  приведет к поступательному перемещению буравчика в сторону  $d\vec{B}$  (см. рис. 3.21).

Модуль вектора (3.84) определяется выражением

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin \alpha}{r^2}, \quad (3.85)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{d\ell}$ .

Приведем некоторые примеры полей, которые можно рассчитать с помощью закона Био – Савара – Лапласа.

**Пример 1.** Поле *прямого тока* – поле тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины.

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей (рис. 3.22, а). Зависимость магнитной индукции от расстояния  $r$  до провода выражается формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3.86)$$

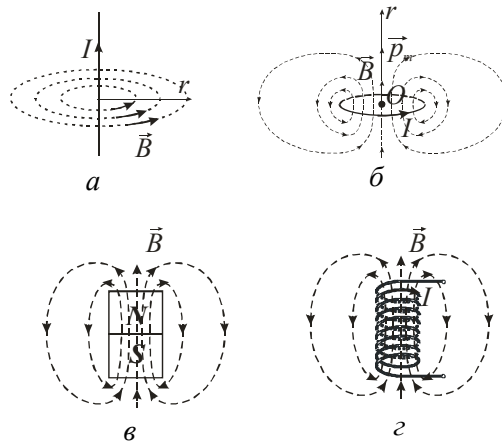


Рис. 3.22

Пример 2. Поле *кругового тока* – поле тока, текущего по тонкому проводнику, имеющему форму окружности радиусом  $R$ .

Линии магнитной индукции поля кругового тока изображены на рис. 3.22, б. В центре (в точке  $O$ ) кругового тока магнитная индукция направлена в сторону положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру, т.е. в сторону вектора  $\vec{p}_m$ :

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{n} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi R^3}. \quad (3.87)$$

Магнитная индукция на оси кругового тока зависит от расстояния  $r$  до центра (точки  $O$ ):

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (3.88)$$

Поле кругового тока подобно полю постоянного магнита (рис. 3.22, в), поэтому контур с током и магнитная стрелка ведут себя одинаково в магнитном поле, которое оказывает на них ориентирующее действие.

Пример 3. Поле *соленоида* – поле провода, навитого на цилиндрический каркас. Структура поля соленоида конечной длины показана на рис. 3.22, з и тоже напоминает поле кругового тока (как поле нескольких витков). Характеристикой соленоида является *плотность намотки*  $n = N / \ell$  (число витков на единицу длины).

В учении об электромагнетизме большую роль играет воображаемый бесконечно длинный соленоид, равномерно обтекаемый

током. У такого соленоида поле оказывается однородным и сосредоточенным внутри соленоида:

$$B = \mu_0 n I. \quad (3.89)$$

Вне соленоида поле отсутствует.

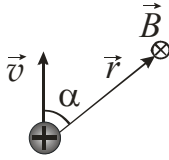


Рис. 3.23

**Пример 4.** Поле движущегося *точечного заряда*. Поскольку ток – совокупность упорядоченно движущихся зарядов – создает магнитное поле, то с помощью закона Био – Савара – Лапласа можно также получить выражение для магнитной индукции поля, создаваемого

отдельным точечным зарядом  $q$ , движущимся со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \vec{v} \times \vec{r}, \quad (3.90)$$

где  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от заряда в данную точку поля;  $r$  – его модуль (рис. 3.23). Модуль вектора (3.90) определяется выражением

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (3.91)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ .

### 3.3.2. Закон Ампера. Сила Лоренца

Согласно закону, установленному Ампером, на элемент  $d\vec{\ell}$  тока  $I$  со стороны магнитного поля  $\vec{B}$  действует сила (*сила Ампера*):

$$d\vec{F}_A = I d\vec{\ell} \times \vec{B}; \quad (3.92)$$

модуль этой силы

$$|d\vec{F}_A| = I d\ell B \sin \alpha, \quad (3.93)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{\ell}$  и  $\vec{B}$ .

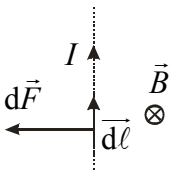


Рис. 3.24

Направление силы Ампера можно определить по правилу буравчика: кратчайший поворот от  $d\vec{\ell}$  к  $\vec{B}$  приведет к поступательному перемещению буравчика в сторону  $d\vec{F}$  (рис. 3.24). Направление силы

Ампера можно также определить по *правилу левой руки*: кисть левой руки расположить так, что-

бы четыре вытянутых пальца располагались вдоль тока, а магнитная индукция «входила» в ладонь. Тогда отогнутый на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы Ампера.

С помощью соотношений (3.86) и (3.92) можно рассчитать силу (на единицу длины) взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами  $b$  (рис. 3.25), то каждый элемент тока  $I_2$  будет находиться в возбуждаемом током  $I_1$  поле, магнитная индукция которого

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}.$$

Угол между элементом тока  $I_2$  и вектором  $\vec{B}_1$  прямой. Тогда на элемент  $d\vec{\ell}$  тока  $I_2$  будет действовать сила

$$|d\vec{F}_A| = I_2 B_1 d\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b} d\ell.$$

Для силы, действующей на единицу длины, получаем:

$$F_\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}. \quad (3.94)$$

На основании формулы (3.94) устанавливается эталон силы тока в СИ – *ампер*. Ампер определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

Сила Ампера (3.92) обусловлена тем, что магнитное поле действует на носители тока. От носителей тока действие силы передается проводнику, по которому они перемещаются. Из выражения для силы Ампера (3.92) можно найти силу, действующую со стороны магнитного поля на отдельно взятый движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд  $q$  (эта сила называется *силой Лоренца*):

$$\vec{F}_Л = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.95)$$

Модуль силы Лоренца

$$F_Л = q v B \sin \alpha, \quad (3.96)$$

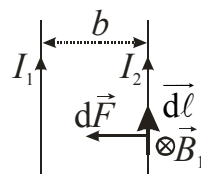


Рис. 3.25

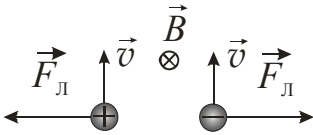


Рис. 3.26

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля, не испытывает действия силы (в этом случае  $\alpha = 0$ ).

Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Если заряд положителен, направление силы можно определить по правилу левой руки, как для тока (за положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов). В случае отрицательного заряда сила направлена в противоположную сторону. На рис. 3.26 показан пример определения направления силы Лоренца, действующей на положительный и отрицательный заряды со стороны магнитного поля (направленного от нас).

Магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, поэтому она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя. Магнитная сила создает нормальное ускорение заряженной частицы.

Пример. Если заряд  $q$  движется в однородном магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ , то магнитная сила создает нормальное ускорение, модуль которого

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{q v B}{m} \quad (3.97)$$

остается постоянным ( $\alpha = \pi/2$ ).

В случае, когда частица движется в плоскости с постоянными по модулю скоростью и нормальным ускорением, траекторией является окружность, радиус которой определяется соотношением (1.15):  $a_n = v^2/R$ . С учетом (3.97) находим радиус:

$$R = \frac{m v}{q B}. \quad (3.98)$$

Радиус окружности зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы к ее массе. Отношение  $q/m$  называется *удельным зарядом* частицы.

Разделив длину окружности  $2\pi R$  на скорость  $v$ , получим период обращения частицы, т.е. время, затрачиваемое на один оборот:

$$T = \frac{2\pi m}{q B}. \quad (3.99)$$

Из этой формулы следует, что период обращения частицы не зависит от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля (это обстоятельство лежит в основе действия *циклотрона* – циклического ускорителя элементарных частиц).

### 3.3.3. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции

Элементарный поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность площадью  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$

$$d\Phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \cos \alpha dS = B_n dS, \quad (3.100)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности (внешняя для замкнутых поверхностей);  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  (рис. 3.27).

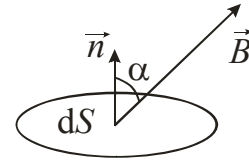


Рис. 3.27

Для произвольной поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{B}$  (*магнитный поток*)

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S B_n dS. \quad (3.101)$$

Единицей потока магнитной индукции (магнитного потока) является *вебер*,  $[\Phi_{\vec{B}}] = \text{Вб}$ .

В природе нет магнитных зарядов, вследствие чего линии  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца – они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Поэтому магнитный поток через замкнутую поверхность должен быть равен нулю (сколько линий вектора  $\vec{B}$  входит в замкнутую поверхность, столько же и выходит из нее). Следовательно, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (3.102)$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$ : *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Циркуляцию  $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  вектора  $\vec{B}$  по контуру  $\ell$  проще найти на примере поля прямого тока (см. рис. 3.22, *a*). Для простоты возьмем контур в форме concentрической окружности радиусом  $r$  вокруг

проводника с током в ортогональной проводнику плоскости (рис. 3.28).

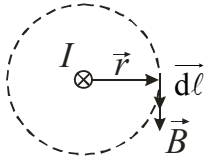


Рис. 3.28

Магнитная индукция в каждой точке контура (на расстоянии  $r$  от провода) направлена по касательной к контуру (см. формулу (3.86)):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \text{ Таким образом, } \vec{B} \cdot \vec{dl} = B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl.$$

Циркуляция  $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_{\ell} dl = \mu_0 I$  (где  $\oint_{\ell} dl = 2\pi r$  – длина окружности).

Для произвольного контура и нескольких токов получим следующую формулу:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (3.103)$$

где  $\sum_i I_i$  – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

При этом токи, направления которых образуют с направлением обхода праввинтовую систему, берутся со знаком «плюс», ток противоположного направления будет отрицательным.

Таким образом, *циркуляция вектора  $\vec{B}$  по некоторому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на  $\mu_0$* . Это утверждение называется теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции (в вакууме).

Сравним поток и циркуляцию электростатического и магнитного полей в вакууме. Согласно формулам (3.10), (3.23), (3.102), (3.103):

$$\begin{aligned} \oint_S E_n dS &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum q, & \oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{dl} &= 0, \\ \oint_S B_n dS &= 0, & \oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{dl} &= \mu_0 \sum_i I_i. \end{aligned}$$

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно различный характер. Источниками электростатического поля являются заряды  $q$ . Магнитное поле не имеет источников. Циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано потенциалом  $\phi$ . Циркуляция вектора магнитной индукции пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.



Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, аналогичный потенциалу  $\varphi$  электростатического поля.

Поле, у которого циркуляция отлична от нуля, называется *вихревым* или *соленоидальным*.

Таким образом, в то время как электростатическое поле потенциально, магнитное поле, в отличие от него, является вихревым.

### 3.3.4. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Допустим, что прямолинейный провод с током может перемещаться во внешнем магнитном поле. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 3.29). Предположим, что замкнутая цепь образует плоский контур. Внешнее поле будем считать однородным и перпендикулярным к плоскости контура.

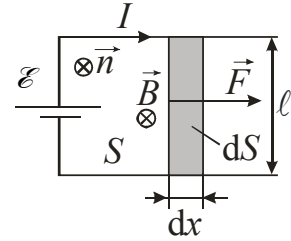


Рис. 3.29

В случае, изображенном на рис. 3.29, направление поля и направление положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру совпадают. Поэтому магнитный поток, пронизывающий контур, положителен и равен  $BS$  ( $S$  – площадь контура). Сила  $\vec{F}$ , действующая на провод в этом случае, направлена вправо и имеет модуль, равный  $IB\ell$ . При перемещении провода вправо на  $dx$  эта сила совершает над ним положительную работу

$$dA = F dx = IB\ell dx = IB dS = I d\Phi,$$

где  $dS$  – приращение площади контура;  $d\Phi$  – приращение магнитного потока через контур, которое равно потоку, «пересеченному» проводом при его движении. В данном случае  $d\Phi > 0$ .

При перемещении провода влево работа силы  $\vec{F}$  была бы отрицательной. Приращение магнитного потока также было бы отрицательным.

В любом случае совершенная над проводом работа равна силе тока, умноженной на пересеченный проводом магнитный поток:

$$dA = I d\Phi. \quad (3.104)$$

Данное соотношение оказывается справедливым для провода любой формы, а также для провода, движущегося в неоднородном магнитном поле.

Чтобы получить работу, совершаемую в магнитном поле при конечном перемещении провода, нужно просуммировать элементарные работы (3.104), совершаемые на элементарных участках пути. В результате получим:

$$A = I \int d\Phi = I \Delta\Phi, \quad (3.105)$$

где  $\Delta\Phi$  – изменение магнитного потока, пронизывающего контур (или поток, «пересеченный» проводом при его движении); ток в проводе предполагается постоянным.

Отметим, что работа (3.105) совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля (это поле остается неизменным), а за счет источника тока, поддерживающего постоянной силу тока  $I$ .

### 3.3.5. Магнитное поле в веществе

Если в магнитное поле  $\vec{B}_0$ , созданное в вакууме, поместить какое-либо вещество, то поле изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает дополнительное поле  $\vec{B}'$ , которое складывается с полем  $\vec{B}_0$  в результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (3.106)$$

Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под  $\vec{B}$  подразумевается усредненное (макроскопическое) поле.

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (*молекулярные токи*). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, поэтому обусловленное ими результирующее поле в среднем равно нулю. Вследствие хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекул суммарный магнитный момент тела также равен нулю. Под действием внешнего поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в од-

ном направлении, вследствие чего вещество намагничивается: его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает поле  $\vec{B}'$ .

Намагничивание вещества естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют *намагниченностью* и обозначают буквой  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m, \quad (3.107)$$

где  $\vec{p}_m$  – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, находящимся в объеме  $\Delta V$ .

Линии поля  $\vec{B}'$ , как и поля  $\vec{B}_0$ , являются замкнутыми, поэтому поток магнитной индукции  $\vec{B}'$  (а следовательно, и  $\vec{B}$ ) через любую замкнутую поверхность равен нулю. Таким образом, теорема Гаусса (3.102) справедлива не только для поля в вакууме, но и для поля в веществе.

Для того чтобы найти циркуляцию поля  $\vec{B}$  по некоторому контуру, кроме суммы макроскопических токов (создающих поле  $\vec{B}_0$ ), нужно также знать алгебраическую сумму молекулярных токов, охваченных этим контуром, которая в свою очередь зависит от  $\vec{B}$ .

Для расчета магнитных полей в веществе вместо магнитной индукции  $\vec{B}$  более удобной оказывается вспомогательная величина

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (3.108)$$

циркуляция которой определяется лишь суммой макроскопических токов:

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i. \quad (3.109)$$

Эта величина называется *напряженностью магнитного поля*.

Соотношение (3.109) выражает теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ : *циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых контуром.*

Единицей напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  и намагниченности  $\vec{J}$  является *ампер на метр*,  $[H] = [J] = \text{А/м}$ .

Намагниченность  $\vec{J}$  принято связывать с напряженностью  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (3.110)$$

где  $\chi$  – безразмерная, характерная для данного магнетика величина, называемая *магнитной восприимчивостью*.

Подставим (3.110) в (3.108) и выразим  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (3.111)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (3.112)$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

С учетом (3.112) формуле (3.111) можно придать вид:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (3.113)$$

В отличие от диэлектрической восприимчивости  $\kappa$ , которая может иметь лишь положительные значения, магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы.

Если некоторую область пространства, в которой создано однородное поле  $\vec{B}_0$ , заполнить магнетиком, то поле усилится в  $\mu$  раз:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (3.114)$$

Отсюда вытекает физический смысл магнитной проницаемости:  $\mu$  показывает, *во сколько раз усиливается поле в магнетике при внесении его в магнитное поле*. Напомним, что диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух однородных и изотропных магнетиков 1 и 2 (рис. 3.30) должны удовлетворять определенным условиям. Рассуждения, приводящие к установлению этих условий, аналогичны рассуждениям, изложенным в подразд. 3.1.5 при установлении условий на границе двух диэлектриков, и могут быть получены из теоремы Гаусса для  $\vec{B}$  и теоремы о циркуляции  $\vec{H}$ :

$$B_{1n} = B_{2n}, H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (3.115)$$

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (3.116)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (3.117)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, образуемые с нормалью к поверхности раздела векторами  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ ;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – магнитные проницаемости первой и второй сред.

В зависимости от численного значения магнитной проницаемости все магнетики подразделяются на три группы:

- 1)  $\mu \leq 1$  – *диамагнетики* (Ag, Au, Cu, ...);
- 2)  $\mu \geq 1$  – *парамагнетики* (Al, Pt, ...);
- 3)  $\mu \gg 1$  – *ферромагнетики* (Fe, Ni, Co, Gd, ...).

Диа- и парамагнетики принадлежат к категории слабомагнитных веществ, их магнитная проницаемость не зависит от напряженности поля  $\vec{H}$ . Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю – железу – они получили название ферромагнетиков.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность на несколько порядков превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков.

Намагниченность и магнитная индукция слабомагнитных веществ изменяются с напряженностью поля линейно (см. (3.110)). Намагниченность ферромагнетиков зависит от  $\vec{H}$  сложным образом. На рис. 3.31 и 3.32 приведены кривые намагничивания железа. *Основной (или нулевой) кривой намагничивания* (кривая 0 – 1) называется кривая намагничивания

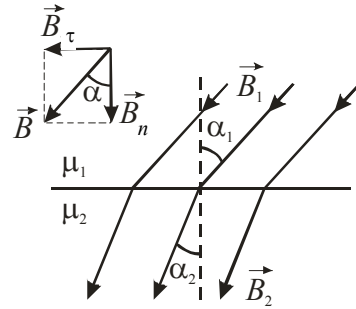


Рис. 3.30

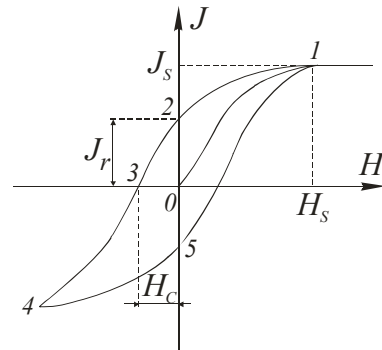


Рис. 3.31

ферромагнетика, намагниченность которого первоначально была равна нулю. При некотором значении напряженности  $H_S$  (порядка 100 А/м) намагниченность железа достигает *намагниченности насыщения*  $J_S$ . Поскольку  $B = \mu_0(H + J)$ , то по достижении насыщения  $B$  продолжает расти с  $H$  по линейному закону (прямая  $1 - 1'$  на рис. 3.32).

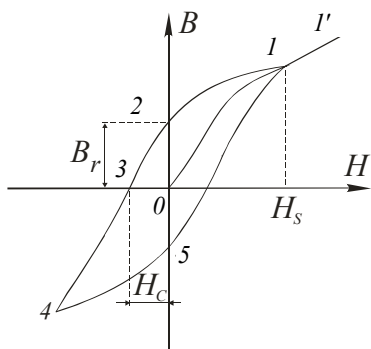


Рис. 3.32

Кроме нелинейной зависимости  $J$  от  $H$  (или  $B$  от  $H$ ), для ферромагнетиков характерно явление *гистерезиса*. Если довести намагниченность до насыщения (точка 1) и затем уменьшать напряженность магнитного поля, то намагниченность  $J$  и индукция  $B$  изменяются не по первоначальной кривой  $1 - 0$ , а по кривой  $1 - 2$ . В результате, когда напряженность внешнего поля становится равной нулю (точка 2), намагниченность не исчезает и характеризуется величиной  $J_r$ , которая называется *остаточной намагниченностью*. Магнитная индукция имеет при этом значение  $B_r$ , называемое *остаточной индукцией*.

Индукция обращается в нуль лишь под действием поля напряженностью  $H_C$ , направленного противоположно полю, вызвавшему намагничивание. Напряженность  $H_C$  называется *коэрцитивной силой*.

Индукция обращается в нуль лишь под действием поля напряженностью  $H_C$ , направленного противоположно полю, вызвавшему намагничивание. Напряженность  $H_C$  называется *коэрцитивной силой*.

При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля намагниченность и индукция изменяются в соответствии с кривой  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ , которая называется *петлей гистерезиса*. Гистерезис приводит к тому, что намагниченность  $J$  ферромагнетика не является однозначной функцией  $H$ , она зависит от предыстории образца – от того, в каких полях он побывал прежде.

В связи с неоднозначностью зависимости  $B$  от  $H$  понятие магнитной проницаемости применяется лишь к основной кривой намагничивания  $0 - 1 - 1'$ . Магнитная проницаемость ферромагнетиков является функцией напряженности поля.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая *точкой Кюри*, при которой он теряет свои ферромагнитные свойства. При нагревании образца выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

Качественная теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейссом. Согласно представлениям Вейсса ферромагнетики при температурах ниже точки Кюри разбиваются на большое число малых макроскопических областей – *доменов*, самопроизвольно намагниченных до насыщения. Линейные размеры доменов составляют порядка  $10^{-4} - 10^{-2}$  см.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент ферромагнетика равен нулю (ферромагнетик не намагничен). Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты не отдельных атомов, как это имеет место в случае парамагнетиков, а целых доменов. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ферромагнетики сохраняют остаточную намагниченность, так как тепловое движение не в состоянии быстро дезориентировать магнитные моменты столь крупных образований, какими являются домены. Поэтому и наблюдается явление магнитного гистерезиса. Для того, чтобы ферромагнетик размагнитить, необходимо приложить коэрцитивную силу; размагничиванию способствуют также встряхивание и нагревание ферромагнетика. Точка Кюри оказывается той температурой, выше которой происходит разрушение доменной структуры.

Количественная теория ферромагнетизма развита Я.И. Френкелем и В. Гейзенбергом на основе квантовой механики.

### 3.3.6. Электромагнитная индукция

В 1831 г. М. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют *электромагнитной индукцией*, а возникающий ток – *индукционным*. Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение потока магнитной индукции  $\Phi$ , и определяется лишь скоростью изменения  $\Phi$ , т.е. значением  $d\Phi / dt$ . При изменении знака  $d\Phi / dt$  меняется также направление тока.

Поясним сказанное следующим примером. На рис. 3.33 изображен контур 1, силу тока в котором  $I_1$  можно менять с помощью реостата. Ток  $I_1$  создает магнитное поле, пронизывающее контур 2.

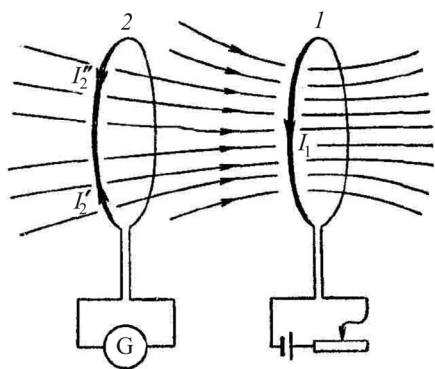


Рис. 3.33

Если увеличивать ток, то поток магнитной индукции  $\Phi$  через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока  $I_2$ , регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока  $I_1$  обусловит убывание потока магнитной индукции через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный

ток  $I_2$  можно вызвать также, приближая контур 2 к контуру 1 или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока будут противоположными. Наконец, электромагнитную индукцию можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы менялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Заполнение всего пространства, в котором поле отлично от нуля, однородным магнетиком приводит, при прочих равных условиях, к увеличению индукционного тока в  $\mu$  раз. Этим подтверждается то, что индукционный ток обусловлен изменением не потока вектора  $\vec{H}$ , а потока магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Э.Х. Ленц установил правило, с помощью которого можно найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Если, например, изменение  $\Phi$  вызвано перемещением контура, то возникает индукционный ток такого направления, что сила, действующая на него во внешнем поле, противится движению контура. При приближении контура 2 к первому контуру возникает ток  $I_2'$  (см. рис. 3.33), который направлен против тока  $I_1$ , и они отталкиваются. При удалении контура 2 от первого контура возникает ток  $I_2''$ , сонаправленный с током  $I_1$ , поэтому они притягиваются.

Пусть контур 2 неподвижен и ток индуцируется в нем путем изменения тока  $I_1$  в первом контуре. В этом случае индуцируется ток  $I_2$  такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока,



приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении  $I_1$ , т.е. возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникает ток  $I_2'$ , создающий поток, направленный влево. При уменьшении  $I_1$  возникает ток  $I_2''$ , собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае их называют *токами Фуко* или *вихревыми токами*. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень большой силы.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает. Поэтому движущиеся в магнитном поле хорошие проводники испытывают торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим пользуются для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 3.34), которая вводится в зазор между полюсами постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и исчезает, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуществляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

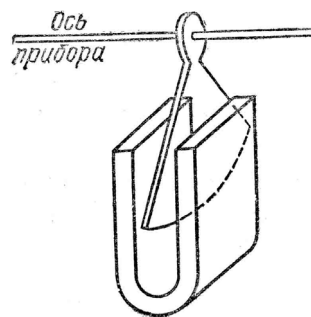


Рис. 3.34

Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание токами Фуко сердечников трансформаторов, их набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление *ферритов* (полупроводниковых магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

Для создания тока в цепи необходимо наличие ЭДС. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока  $\Phi$  в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$ .

Рассмотрим контур с подвижным проводом-перемычкой, изображенный на рис. 3.29. Контур содержит источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ . За время  $dt$  источник совершает работу

$$dA = P dt = \mathcal{E} I dt,$$

где  $I$  – сила тока в контуре;  $P$  – мощность, развиваемая источником тока (см. (3.77)).

Когда провод неподвижен, работа полностью превращается в джоулеву теплоту  $dQ = I^2 R dt$ . Если же провод движется, то за время  $dt$  магнитная сила совершит работу, которая согласно (3.104) равна  $I d\Phi$ , где  $d\Phi$  – магнитный поток через закрашенную площадку, т.е. приращение потока магнитной индукции через контур за время  $dt$  (см. рис. 3.29). Эта работа совершается за счет энергии источника тока. Таким образом, при движении провода совершаемая источником тока работа идет не только на выделение теплоты, но и на совершение над проводом работы:  $\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi$ , откуда следует, что

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (3.118)$$

Полученное выражение означает, что при изменении потока магнитной индукции через контур сила тока в нем оказывается такой, как если бы, кроме ЭДС источника тока, в контуре действовала

ЭДС, равная  $-d\Phi/dt$ . Эта ЭДС и есть электродвижущая сила индукции. Таким образом,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.119)$$

Чтобы понять смысл знака «минус» в формуле (3.119), свяжем знак  $\mathcal{E}_i$  и направление магнитной индукции  $\vec{B}$  (при положительном потоке) правилом буравчика (правого винта): если вектор  $\vec{B}$  направлен от нас (см. рис. 3.29), то положительное значение  $\mathcal{E}_i$  соответствует обходу по контуру по часовой стрелке (правый винт).

Таким образом, если  $d\Phi/dt > 0$ , то согласно (3.119)  $\mathcal{E}_i < 0$ , что означает направление обхода против часовой стрелки; если  $d\Phi/dt < 0$ , то  $\mathcal{E}_i > 0$ , что означает направление обхода по часовой стрелке. Соотношение (3.119) называют законом Фарадея для электромагнитной индукции.

Пусть контур состоит из  $N$  витков (например, представляет собой соленоид). Поскольку витки соединяются последовательно, индуцируемая в контуре ЭДС будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum \Phi.$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (3.120)$$

называют *полным магнитным потоком* или *потокосцеплением*. Ее измеряют в тех же единицах, что и магнитный поток. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, то

$$\Psi = N\Phi. \quad (3.121)$$

ЭДС, индуцируемая в сложном контуре, определяется формулой

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (3.122)$$

При скорости изменения потокосцепления, равной 1 Вб/с, в контуре индуцируется ЭДС, равная 1 В.

Текущий в каком-либо контуре электрический ток создает пронизывающий этот контур полный магнитный поток  $\Psi$ . Изменения силы тока сопровождаются изменениями магнитного потока, вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС. Это явление называется *самоиндукцией*.

Согласно закону Био – Савара – Лапласа магнитная индукция пропорциональна силе тока, создающего поле. Отсюда следует, что ток  $I$  в контуре и создаваемый им полный магнитный поток  $\Psi$  через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI. \quad (3.123)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока и полным магнитным потоком называется *индуктивностью* контура.

Пропорциональность потока  $\Psi$  силе тока  $I$  имеет место только в том случае, когда магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которая окружена контуром, не зависит от напряженности поля  $H$ , т.е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае  $\Psi$  является сложной функцией от  $I$ .

При неизменной силе тока полный поток может изменяться за счет изменения формы и размеров контура. Таким образом, индуктивность зависит от геометрии контура (т.е. от его формы и размеров), а также от магнитных свойств ( $\mu$ ) среды. Если контур жесткий и вблизи него нет ферромагнитных тел, индуктивность является постоянной величиной.

Единицей индуктивности служит *генри* (Гн), равный индуктивности такого проводника, у которого при силе тока в нем в 1 А возникает сцепленный с ним полный магнитный поток в 1 Вб.

Определим индуктивность соленоида. Рассмотрим соленоид такой длины, чтобы его можно было считать бесконечным. При протекании по нему тока  $I$  внутри соленоида возбуждается однородное поле с индукцией  $B = \mu_0 \mu n I$  (см. (3.89) и (3.114)). Поток через каждый из витков  $\Phi = BS$ , а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом,

$$\Psi = N\Phi = n\ell BS = \mu_0 \mu n^2 \ell SI, \quad (3.124)$$

где  $\ell$  – длина соленоида;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $n$  – число витков на единицу длины.

Сравнение формул (3.123) и (3.124) дает для индуктивности очень длинного соленоида выражение

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (3.125)$$

где  $V$  – объем соленоида,  $V = \ell S$ .

Изменения силы тока в контуре сопровождаются возникновением электродвижущей силы самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , которая в случае, если индуктивность остается постоянной (в отсутствие ферромагнетиков), определяется формулой

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.126)$$

Знак «минус» в этой формуле можно также объяснить правилом Ленца, согласно которому индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. В данном случае причиной, вызывающей  $\mathcal{E}_s$ , является изменение силы тока в цепи.

Рассмотрим два расположенных рядом контура 1 и 2 (см. рис. 3.33). Текущий в контуре 1 ток силы  $I_1$  создает связанный с контуром 2 полный магнитный поток

$$\Psi_2 = L_{21} I_1. \quad (3.127)$$

При изменениях тока  $I_1$  в контуре 2 индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (3.128)$$

(мы предполагаем, что контуры жесткие и ферромагнетиков вблизи них нет).

Аналогично при протекании в контуре 2 тока силы  $I_2$  возникает сцепленный с контуром 1 поток  $\Psi_1 = L_{12} I_2$ . При изменениях тока  $I_2$  в контуре 1 индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Контуры 1 и 2 называются *связанными*, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется *взаимной индукцией*. Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *взаимной индуктивностью* контуров. Соответствующий расчет показывает, что в отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты равны друг другу:  $L_{12} = L_{21}$ . Измеряется взаимная индуктивность также в генри.

В настоящее время в технике наряду с постоянным током широко используется и переменный ток. Важное преимущество переменного тока над постоянным состоит в том, что напряжение переменного тока можно достаточно легко повышать или понижать практически без потерь энергии с помощью трансформаторов. *Трансформаторы* – это приборы, при помощи которых преобразуется напряжение переменного тока. Принцип работы трансформаторов основан на законе электромагнитной индукции.

Простейший трансформатор представляет собой две *обмотки*, навитые на один и тот же ферромагнитный сердечник (рис. 3.35). Концы первой обмотки подключаются к источнику переменного тока с напряжением  $U_1$ . Эта обмотка называется *первичной*. К концам второй обмотки, на которых создается переменное напряжение  $U_2$ , подключается нагрузка, потребляющая электроэнергию. Эта обмотка называется *вторичной*. Если  $U_2 > U_1$ , трансформатор называется повышающим. Если  $U_2 < U_1$ , трансформатор называется понижающим.

При подключении первичной обмотки к сети переменного напряжения по ней течет переменный ток, создающий в обмотке переменное магнитное поле и переменный магнитный поток. Все линии магнитного поля, проходящие через витки первичной обмотки, проходят и через витки вторичной обмотки, т.е. поток через один виток вторичной обмотки точно такой же, как поток через один виток первичной обмотки. Это происходит потому, что магнитное поле в ферромагнетиках значительно превышает магнитное поле в воздухе и все замкнутые магнитные силовые линии практически без рассеяния идут внутри общего для обмоток сердечника.

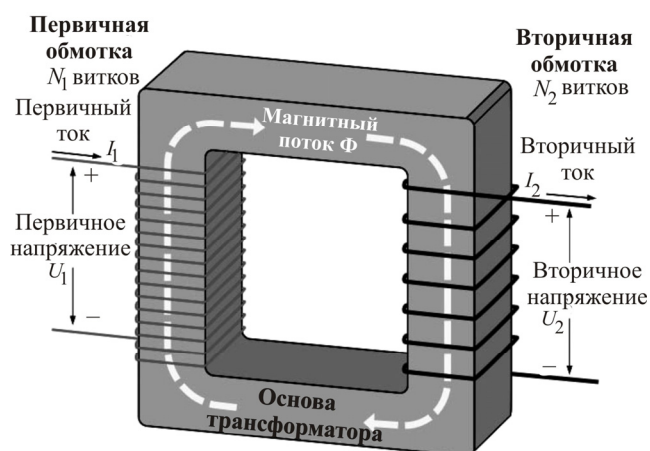


Рис. 3.35

Замкнутый ферромагнитный сердечник, являясь «проводником магнитных силовых линий», представляет собой замкнутую «магнитную цепь» – *магнитопровод*, внутри которого проходят все силовые линии.

В результате электромагнитной индукции переменный магнитный поток в магнитопроводе создает в обеих обмотках ЭДС индукции, пропорциональную первой производной магнитного потока. Когда вторичная обмотка ни к чему не подключена (режим холостого хода), ЭДС индукции в первичной обмотке практически полностью компенсирует напряжение источника питания, поэтому ток через первичную обмотку невелик. Напряжение на вторичной обмотке в режиме холостого хода определяется *коэффициентом трансформации* – отношением числа витков первичной обмотки  $N_1$  к числу витков вторичной обмотки  $N_2$ :

$$K = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (3.129)$$

При подключении вторичной обмотки к нагрузке по ней начинает течь ток. Этот ток также создает магнитный поток в магнитопроводе, причем он направлен противоположно магнитному потоку, создаваемому первичной обмоткой. В результате в первичной обмотке нарушается компенсация ЭДС индукции и ЭДС источника питания, что приводит к увеличению тока в первичной обмотке до тех пор, пока магнитный поток не достигнет практически прежнего значения. В этом режиме отношение токов первичной и вторичной обмотки равно обратному отношению числа витков обмоток:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (3.130)$$

Отношение напряжений в первом приближении остается прежним. В результате мощность, потребляемая от источника в цепи первичной обмотки, практически полностью передается во вторичную.

Наиболее часто трансформаторы применяются в электросетях и в источниках питания различных приборов.

### 3.3.7. Энергия магнитного поля

Пусть имеется цепь, изображенная на рис. 3.36. При замкнутом ключе в соленоиде установится ток  $I$ , который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если разомкнуть ключ, то

через сопротивление  $R$  будет некоторое время течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая током за время  $dt$ ,

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi. \quad (3.131)$$

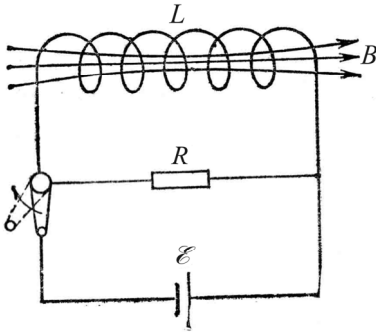


Рис. 3.36

Эта работа идет на приращение внутренней энергии сопротивления  $R$ , обмотки соленоиды и соединительных проводов (т.е. на их нагревание). Совершение работы сопровождается ослаблением магнитного поля. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит,

остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (3.131). Таким образом, обозначив энергию сцепленного с соленоидом магнитного поля через  $W$ , можно написать, что

$$dW = -dA = Id\Psi \quad (3.132)$$

(работа  $dA$  равна убыли энергии).

Если индуктивность соленоиды не зависит от  $I$  ( $L = \text{const}$ ), то  $d\Psi = L dI$  и выражение (3.132) принимает вид

$$dW = LI dI. \quad (3.133)$$

Проинтегрировав это выражение в пределах от 0 до  $I$ , получим выражение для энергии магнитного поля соленоиды с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ :

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.134)$$

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. В случае бесконечно длинного (практически очень длинного) соленоиды  $L = \mu_0 \mu n^2 V$ ,  $H = n I$ , откуда  $I = \frac{H}{n}$ .

Подставляя эти значения  $L$  и  $I$  в (3.134), получим:



$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (3.135)$$

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия заключена в пределах соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью  $w$ , которую можно получить, разделив  $W$  на  $V$ :

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (3.136)$$

С учетом (3.113) выражение для *объемной плотности энергии* магнитного поля можно переписать в виде

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (3.137)$$

Данные соотношения получены на примере однородного поля соленоида, но они справедливы и для неоднородного поля.

Чтобы найти энергию магнитного поля, заключенную в некотором объеме  $V$ , нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (3.138)$$

### 3.3.8. Уравнения Максвелла

Если неподвижный контур находится в переменном магнитном поле, то, согласно открытию Фарадея, в контуре возникает индукционный ток, который свидетельствует о том, что изменяющееся во времени магнитное поле вызывает в контуре появление сторонних сил. Эти силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводнике; они также не могут быть магнитными силами, поскольку такие силы работы над зарядами не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводнике электрическим полем (сторонних сил), причем циркуляция напряженности поля сторонних сил дает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\ell} \vec{E}^{\text{ст}} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.139)$$

Данное выражение для ЭДС является обобщением соотношения (3.64) на случай замкнутого контура.

Согласно закону Фарадея (3.119) можем записать следующее:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (3.140)$$

Приравняв правые части формул (3.139) и (3.140), придем к соотношению:

$$\oint_{\ell} \vec{E}^{\text{ст}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (3.141)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве электрического поля независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Причем, это поле существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля. Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и оканчиваются на зарядах. Циркуляция напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю (см. (3.10)). Циркуляция напряженности поля, обусловленного изменяющимся магнитным полем, согласно (3.141) отлична от нуля. Следовательно, это поле, как и магнитное, является вихревым. Линии напряженности *вихревого электрического поля* замкнуты или уходят в бесконечность.

Итак, электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. В общем случае электрическое поле складывается из электростатического поля, создаваемого зарядами, и вихревого поля, обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Из соотношений (3.10) и (3.141) получаем обобщенную теорему о циркуляции напряженности электрического поля:

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad (3.142)$$

где  $\vec{E}$  – результирующая напряженность электростатического и вихревого электрических полей.

Таким образом, электрическое поле не только существует вокруг зарядов, но и порождается переменным магнитным полем. Рассуждая подобным образом, Максвелл пришел к выводу, что магнитное поле, в свою очередь, порождается не только током, но

и переменным электрическим полем. Он «поправил» теорему о циркуляции (3.109) следующим образом:

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i + \frac{d\Phi_{\vec{D}}}{dt}. \quad (3.143)$$

Величина  $\Phi_{\vec{D}} = \int_S D_n dS$  представляет собой поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $\ell$ .

Величина  $d\Phi_{\vec{D}}/dt$  есть скорость изменения этого потока, которую Максвелл назвал *током смещения*:

$$I_{\text{см}} = \frac{d\Phi_{\vec{D}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S D_n dS. \quad (3.144)$$

Уравнение (3.143) можно записать в виде:

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i + I_{\text{см}}. \quad (3.145)$$

Таким образом, *циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов и тока смещения, охватываемых контуром.*

Ток смещения – воображаемый ток. Это удобная модель явления, поскольку мы привыкли к тому, что магнитные поля создаются движущимися зарядами или токами. Нам проще считать, что источником некоторого дополнительного магнитного поля является не переменное электрическое поле, а некоторый ток смещения, дополнительный к обычным токам проводимости. Итак, теперь мы можем сказать, что в присутствии переменных электрических полей текут токи смещения, которые порождают магнитное поле наряду с токами проводимости.

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

Основу теории образуют четыре *уравнения Максвелла*. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль,

как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (3.142) и (3.102):

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad \oint_S B_n dS = 0.$$

Первое из этих уравнений связывает значения  $\vec{E}$  с изменениями вектора  $\vec{B}$  во времени и является, по существу, выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т.е. магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (3.143) и (3.39):

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_S D_n dS, \quad \oint_S D_n dS = \sum q.$$

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе уравнение показывает, что источниками вектора  $\vec{D}$  служат сторонние заряды.

Отметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля:  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Во второй же паре фигурируют только вспомогательные величины:  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ .

Для описания полей в изотропных средах к системе нужно добавить уравнения связи между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  (см. (3.37) и (3.113)):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями указывает на то, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, чисто электрическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, порождают не только электрическое, но и магнитное поле. Неподвижный провод с постоянным током создает постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод движется. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой

точке будет изменяться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается чисто электрическим или чисто магнитным, относительно других систем отсчета представляет собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое *электромагнитное поле*.

Одним из самых важных выводов, вытекающих из системы уравнений Максвелла, является вывод о возможности существования магнитного и электрического полей, не связанных с какими-то материальными источниками – зарядами. Электрическое и магнитное поля, порождая друг друга, могут распространяться в пространстве. Распространение электромагнитного возмущения называется *электромагнитной волной*. Радиоволны, видимый свет, инфракрасное, ультрафиолетовое, рентгеновское излучения,  $\gamma$ -излучение – все эти явления представляют собой электромагнитные волны, отличающиеся частотами колебаний полей и длинами волн. Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме (*скорость света*)  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Она выражается через электрическую и магнитную постоянные (что само по себе указывает на электромагнитную природу света):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (3.146)$$

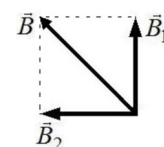
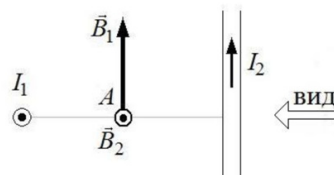
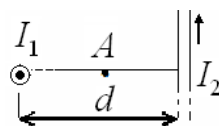
### Примеры решения задач

**№ 1.** Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи 80 А и 60 А. Расстояние между проводами равно 10 см. Определите магнитную индукцию в точке  $A$ , одинаково удаленной от обоих проводников.

Д а н о:  $I_1 = 80$  А,  $I_2 = 60$  А;  $d = 0,1$  м.

Р е ш е н и е. Согласно принципу суперпозиции полей проводники создают в точке  $A$  магнитные поля, которые определяются векторами  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  соответственно, а суммарное поле характеризуется вектором  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \Rightarrow B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}.$$



Вид справа

Поле бесконечного проводника с током определяется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ где } r = \frac{d}{2}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

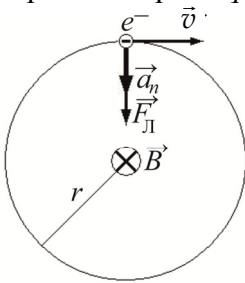
$$\text{Тогда } B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \sqrt{6400 + 3600}}{\pi \cdot 0,1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 0,4 \text{ мТл.}$$

**№ 2.** Электрон в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл движется по окружности. Найдите силу  $I$  эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

Д а н о:  $B = 0,1$  Тл,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Р е ш е н и е. По определению сила тока  $I = \frac{q}{t}$ . Если за  $q$  взять заряд электрона  $q_e$ , то время  $t$  равно периоду вращения  $T$ .



Применим второй закон Ньютона для электрона:

$$m_e a_n = F_L,$$

где  $a_n$  – центростремительное (нормальное)

ускорение,  $a_n = \frac{v^2}{r}$ ;  $F_L$  – сила Лоренца,

$F_L = q_e B v \sin \alpha$ . Тогда

$$m_e \frac{v^2}{r} = q_e B v, \text{ или } m_e \frac{v}{r} = q_e B.$$

Подставив в эту формулу  $v = \frac{2\pi r}{T}$ , получим:

$$m_e \frac{2\pi r}{rT} = q_e B \Rightarrow T = \frac{2\pi m_e}{q_e B}.$$

Теперь находим силу тока:

$$I = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e^2 B}{2\pi m_e} = \frac{(1,6)^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0,1}{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,448 \cdot 10^{-9} = 0,448 \text{ нА.}$$

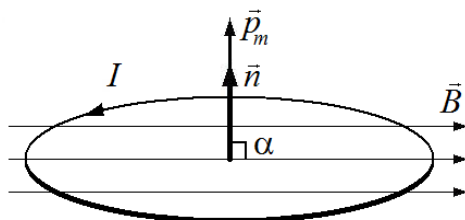
**№ 3.** Круглая рамка с током ( $S = 15 \text{ см}^2$ ) расположена параллельно магнитному полю ( $B = 0,1$  Тл), и на нее действует вращаю-

щий момент  $M = 0,45$  мН·м. Определите силу тока, текущего по рамке.

Д а н о:  $S = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $B = 0,1$  Тл;  $M = 0,45 \cdot 10^{-3}$  Н·м;  $\alpha = 90^\circ$ .

Р е ш е н и е. Вращающий момент, действующий на рамку со стороны поля, определяется формулой

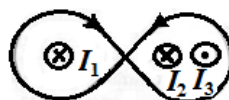
$$M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha,$$



где  $\alpha$  – угол между вектором индукции поля  $\vec{B}$  и положительной нормалью  $\vec{n}$  к рамке;  $p_m$  – модуль магнитного момента,  $p_m = IS$ . Тогда

$$M = ISB \Rightarrow I = \frac{M}{SB} = \frac{0,45 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1} = 3 \text{ А.}$$

№ 4. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции для замкнутого контура, изображенного на рисунке, если сила тока в проводниках:  $I_1 = 2$  А,  $I_2 = 4$  А,  $I_3 = 6$  А.



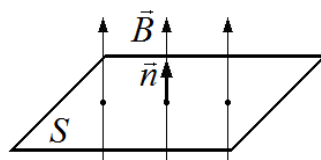
Р е ш е н и е. По теореме о циркуляции вектора магнитной индукции

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_i^N I_i,$$

где  $N = 3$ . Направление обхода контура показано на рисунке. Тогда

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 = 10^{-5} \text{ Тл} \cdot \text{м.}$$

№ 5. Замкнутая квадратная рамка из гибкой проволоки расположена в магнитном поле с индукцией 0,1 Тл, силовые линии которого направлены перпендикулярно к плоскости рамки.



Какой заряд протечет в рамке, если, не меняя расположения рамки, придать ей форму окружности? Длина проволоки 1 м, ее сопротивление 100 Ом.

Д а н о:  $B = 0,1$  Тл;  $\ell = 1$  м;  $R = 100$  Ом.

Р е ш е н и е. Магнитный поток, пронизывающий рамку,

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между индукцией  $\vec{B}$  и нормалью к рамке  $\vec{n}$ .

Любое изменение магнитного потока приводит к возникновению в рамке ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ . В нашем случае магнитный поток меняется вследствие изменения площади рамки  $S$ .

Площадь квадратной рамки

$$S_{\text{кв}} = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{\ell^2}{16}.$$

Поскольку длина окружности  $\ell = 2\pi r$ , то  $r = \frac{\ell}{2\pi}$ . Тогда площадь круглой рамки

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

Согласно закону Фарадея  $\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B(S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}})}{\Delta t}$ .

По закону Ома  $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ . Подставим  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ . Получим:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{B(S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}})}{R\Delta t}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\Delta q = \frac{B}{R} \left( \frac{\ell^2}{4\pi} - \frac{\ell^2}{16} \right) = \frac{B\ell^2}{4R} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) = \frac{0,1 \cdot 1}{4 \cdot 100} \left( \frac{1}{3,14} - \frac{1}{4} \right) = 17,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**№ 6.** Индуктивность катушки равна 2 мГн. Ток частотой 50 Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определите среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую за интервал времени, в течение которого ток в катушке изменяется от нулевого до максимального значения. Амплитудное значение силы тока 10 А.

Д а н о:  $L = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $\nu = 50$  Гц,  $I_0 = 10$  А.

Р е ш е н и е. Закон изменения тока:

$$I = I_0 \sin \omega t, \quad \text{или} \quad I = I_0 \sin(2\pi \nu t).$$

Предположим, что  $I = 0$  А при  $t = 0$  с, тогда  $I = 10 \sin(100\pi t)$ .

ЭДС самоиндукции определяется по формуле:



$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega \cos \omega t = -2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 100\pi \cdot \cos(100\pi t) = \\ &= -2\pi \cdot \cos(100\pi t).\end{aligned}$$

От нулевого до максимального ( $I = 10$  А) ток меняется за время  $\Delta t = \frac{1}{4}T$ , где  $T$  – период колебаний тока,  $T = \frac{1}{\nu}$ . Отсюда  $\Delta t = \frac{1}{4\nu}$ .

Находим среднее значение ЭДС (знак «−» у ЭДС опускаем):

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}_i \rangle &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathcal{E}_i(t) dt = \frac{1}{\Delta t} I_0 L \omega \int_0^{\Delta t} \cos(\omega t) dt, \\ \langle \mathcal{E}_i \rangle &= \frac{I_0 L \omega}{\Delta t} \sin(\omega \Delta t) = I_0 L \cdot 2\pi\nu \cdot 4\nu \cdot \sin\left(2\pi\nu \cdot \frac{1}{4\nu}\right) = 8\pi\nu^2 I_0 L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \langle \mathcal{E}_i \rangle &= 8\pi\nu^2 I_0 L = 8\pi \cdot 2500 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 400\pi = 1256 \text{ В}.\end{aligned}$$

**№ 7.** На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Определите энергию  $W$  магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток через сечение железного сердечника равен 0,5 мВб.

Д а н о:  $N = 200$ ;  $I = 2,5$  А;  $\Phi = 0,5 \cdot 10^{-3}$  Вб.

Р е ш е н и е. При намотке провода на кольцо получаем тороид.

Энергия магнитного поля  $W = \frac{LI^2}{2}$ , где  $L$  – индуктивность тороида.

С одной стороны, полный магнитный поток (потокосцепление) тороида  $\Psi = N\Phi$ , с другой стороны,  $\Psi = LI$ . Поэтому  $N\Phi = LI$ , откуда  $L = \frac{N\Phi}{I}$ . Тогда

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{N\Phi I^2}{2I} = \frac{N\Phi I}{2} = \frac{200 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2} = 0,125 \text{ Дж}.$$

### 3.4. Электромагнитные колебания и волны

#### 3.4.1. Колебательный контур

Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность и емкость. Такая цепь называется колебательным контуром. На рис. 3.37, а изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре с электрическим сопротивлением, равным нулю.

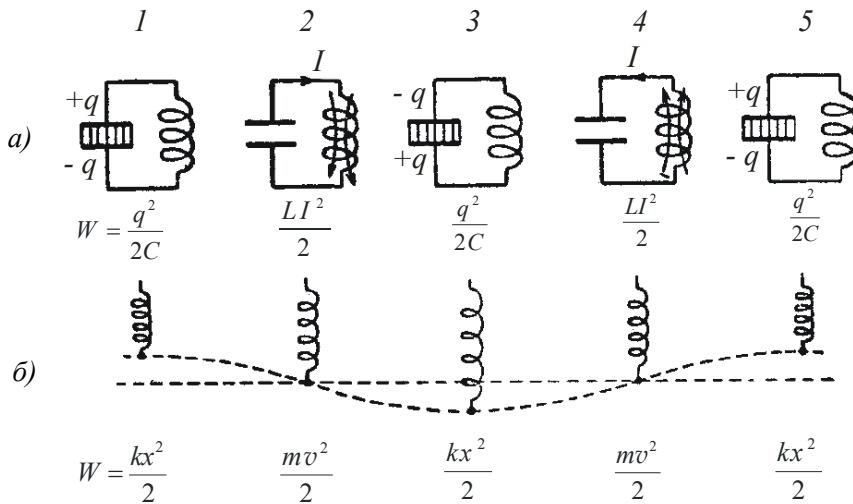


Рис. 3.37

Для того чтобы вызвать колебания, можно присоединить отключенный от индуктивности конденсатор к источнику тока, вследствие чего на обкладках возникнут разноименные заряды величиной  $q_m$  (позиция 1 на рис. 3.37, а). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна  $q^2 / (2C)$  (см. (3.57)). Если затем отключить источник тока и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна  $LI^2 / 2$  (см. (3.134)).

Поскольку сопротивление цепи равно нулю, полная энергия, складывающаяся из энергии электрического поля и энергии магнитного поля, не расходуется на нагревание и будет оставаться постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (позиция 2; начиная с этого момента ток течет за счет ЭДС самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается и, когда заряды на обкладках достигнут первоначальной величины  $q_m$ , сила тока становится равной нулю (позиция 3). Затем те же процессы протекают в обратном порядке (позиции 4 и 5), после чего система приходит в первоначальное состояние (позиция 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе опи-

санного процесса периодически изменяются (т.е. колеблются) заряд  $q$  на обкладках, напряжение  $U$  на конденсаторе и сила тока  $I$ , текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 3.37, б колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения  $x_m$ . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная  $kx_m^2/2$  (см. (1.94)). Позиция 2 соответствует прохождению маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую  $mv^2/2$ .

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии. Индуктивность  $L$  играет роль массы, а величина, обратная емкости ( $1/C$ ) – роль коэффициента жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , а силе тока  $I$  – скорости  $v$ . Как мы увидим ниже, аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Найдем уравнение колебаний в контуре без сопротивления. Условимся считать положительным ток, заряжающий конденсатор (рис. 3.38).

Тогда

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.147)$$

Поскольку сопротивление  $R$  контура равно нулю, падения напряжения на соединительных проводах нет, и напряжение на конденсаторе  $\varphi_1 - \varphi_2 = q/C$  в каждый момент времени равно ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L dI/dt$ . Следовательно,

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.148)$$

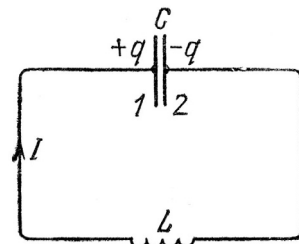


Рис. 3.38

Для изображенной на рис. 3.38 стадии процесса зарядки конденсатора напряжение  $\varphi_1 - \varphi_2$  положительно, а  $dI/dt$  отрицательно (ток уменьшается). Поэтому справа в уравнении (3.148) стоит знак «минус».

Сделав замену  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$  в уравнении (3.148) и произведя простые преобразования, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (3.149)$$

Получилось уравнение вида (1.92) относительно заряда конденсатора  $q$ . Следовательно, заряд на обкладках конденсатора изменяется (колеблется) по гармоническому закону:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (3.150)$$

с амплитудой  $q_m$  и циклической частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.151)$$

Эта частота называется *собственной частотой контура*. Для периода колебаний получается *формула Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.152)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (3.153)$$

Продифференцировав функцию (3.150) по времени, получим выражение для силы тока:

$$I = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (3.154)$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ .

Из формул (3.153) и (3.154) следуют выражения для амплитуд колебаний напряжения на конденсаторе и силы тока:

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = q_m \omega_0.$$

Взяв отношение этих амплитуд и заменив  $\omega_0$  по формуле (3.151), получим соотношение

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.155)$$

К этой формуле можно прийти также исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля  $CU_m^2/2$  равно наибольшему значению энергий магнитного поля  $LI_m^2/2$ .

### 3.4.2. Свободные затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает сопротивлением (рис. 3.39). Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. В этом случае ЭДС самоиндукции в каждый момент времени равна сумме напряжения на конденсаторе и напряжения на сопротивлении, равного  $IR$ :

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.156)$$

Введя обозначение

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad (3.157)$$

с учетом (3.151) уравнение (3.156) запишем в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.158)$$

С математической точки зрения уравнение (3.158) тождественно с уравнением (1.126). Из сопоставления формул (3.157) и (1.125) следует, что электрическое сопротивление  $R$  играет роль коэффициента сопротивления среды  $r$ .

В случае, когда  $\beta < \omega_0$ , решение уравнения (3.158) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha). \quad (3.159)$$

Здесь начальная амплитуда  $q_0$  и фаза  $\alpha$  определяются из начальных условий, а *циклическая частота затухающих колебаний*

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3.160)$$

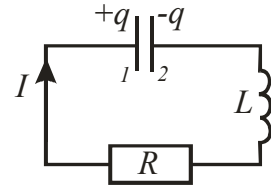


Рис. 3.39

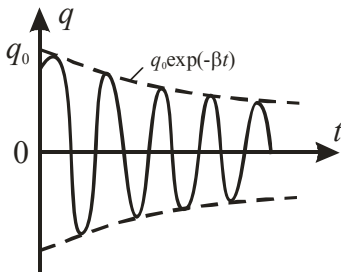


Рис. 3.40

График функции (3.159) изображен на рис. 3.40.

Логарифмический декремент затухания (см. (1.134))

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{\pi R}{L\omega_3}. \quad (3.161)$$

Добротность контура (см. (1.136))

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{L\omega_3}{R}. \quad (3.162)$$

### 3.4.3. Вынужденные электромагнитные колебания. Полная цепь переменного тока

Чтобы вызвать вынужденные электромагнитные колебания, нужно, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение (рис. 3.41):

$$U = U_0 \cos \omega t. \quad (3.163)$$

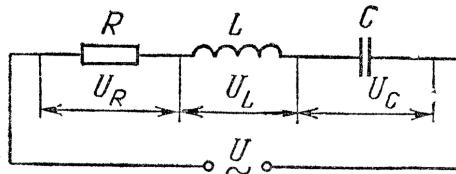


Рис. 3.41

Это напряжение нужно добавить к ЭДС самоиндукции. В результате соотношение (3.156) примет вид:

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt} + U_0 \cos \omega t, \text{ или } \frac{q}{C} + IR + L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t. \quad (3.164)$$

Отношение  $q/C$  есть напряжение  $U_C$  на конденсаторе, произведение  $IR$  равно напряжению  $U_R$  на сопротивлении, выражение  $L dI/dt$  определяет напряжение  $U_L$  на индуктивности. Поэтому можно написать:

$$U_C + U_R + U_L = U_0 \cos \omega t. \quad (3.165)$$

Таким образом, сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени напряжению, приложенному извне (см. рис. 3.41).

С учетом введенных ранее обозначений (3.151) и (3.157) уравнение (3.164) перепишем в виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t. \quad (3.166)$$

Это неоднородное (правая часть отлична от нуля) дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного уравнения (3.166) равно сумме общего решения (3.159) однородного уравнения (3.158), соответствующего данному неоднородному, и частного решения данного неоднородного уравнения (которое можно найти по виду правой части):

$$q = q_m \sin(\omega t - \varphi) = q_m \cos(\omega t - \varphi - \pi/2). \quad (3.167)$$

Амплитуду заряда  $q_m$  и отставание по фазе  $\varphi$  можно найти, непосредственно подставляя частное решение (3.167) в уравнение (3.166), откуда:

$$q_m = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}, \quad (3.168)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta \omega} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (3.169)$$

Общее решение уравнения (3.166), описывающее изменение заряда конденсатора при вынужденных колебаниях,

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha) + q_m \cos(\omega t - \varphi - \pi/2).$$

Первое слагаемое в этом уравнении играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени из-за экспоненциального множителя  $e^{-\beta t}$  роль этого слагаемого уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое.

Таким образом, функция (3.167) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте подаваемого напряжения.

Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях в контуре меняется по следующему закону:

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.170)$$

где амплитуда тока

$$I_0 = q_m \omega = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \quad (3.171)$$

Ток отстает от внешнего напряжения по фазе на угол  $\varphi$ , определяемый соотношением (3.169).

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать как протекание переменного тока в полной цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и сопротивлением.

Полученное выражение для амплитуды силы тока (3.171) можно формально толковать как закон Ома для амплитудных значений тока и внешнего напряжения. Стоящую в знаменателе этого выражения величину, имеющую размерность сопротивления, обозначают буквой  $Z$  и называют *полным сопротивлением цепи переменного тока* или *импедансом*:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \quad (3.172)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}. \quad (3.173)$$

Величину, стоящую в круглых скобках этого выражения, обозначают  $X$  и называют *реактивным сопротивлением*:

$$X = \omega L - 1/(\omega C). \quad (3.174)$$

При этом величину  $\omega L$  называют *индуктивным сопротивлением*, а величину  $1/(\omega C)$  – *емкостным сопротивлением*. Их обозначают соответственно  $X_L$  и  $X_C$ . Сопротивление  $R$  в этом случае называют *активным сопротивлением* цепи. Термин «активное сопротивление» используется в том смысле, что именно на этом сопротивлении рассеивается энергия в виде тепла.

Итак,

$$X_L = \omega L, X_C = 1/(\omega C), X = X_L - X_C, Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (3.175)$$

Найдем напряжения на отдельных элементах контура:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.176)$$

$$U_R = IR = I_0 R \cos(\omega t - \varphi) = U_{Rm} \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.177)$$



$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -LI_0\omega \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.178)$$

Из формул (3.176)–(3.178) видно, что  $U_R$  находится в фазе с током  $I$  (3.170),  $U_C$  отстает по фазе от  $I$  на  $\pi/2$ , а  $U_L$  опережает  $I$  на  $\pi/2$ . Все это можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы (см. подразд. 1.3), изобразив амплитуды напряжений и их векторную сумму, равную согласно (3.165) вектору внешнего напряжения (рис. 3.42).

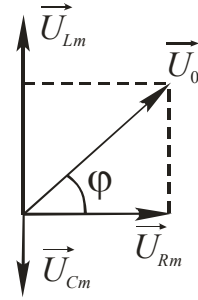


Рис. 3.42

Резонансную частоту для заряда  $q$  и напряжения  $U_C$  на конденсаторе можно найти аналогично резонансной частоте (1.142) для смещения при механических колебаниях, исследовав функцию (3.168) на максимум:

$$\omega_{\text{рез}q} = \omega_{\text{рез}U_C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \quad (3.179)$$

Резонансные кривые для  $U_C$  изображены на рис. 3.43, *а* (резонансные кривые для  $q$  имеют точно такой же вид). Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 3.43, *б*. Амплитуда силы тока (3.171) имеет максимальное значение при  $X = L\omega - 1/(\omega C) = 0$ , откуда

$$\omega_{\text{рез}I} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0. \quad (3.180)$$

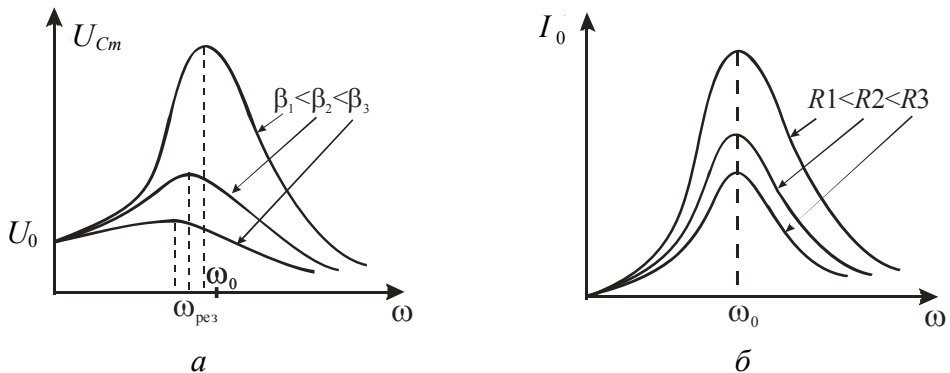


Рис. 3.43

Разности потенциалов на индуктивности и емкости имеют при резонансе тока одинаковые амплитуды и противоположные фазы, так что их сумма обращается в нуль, а напряжение на активном сопротивлении оказывается равным ЭДС источника энергии.

На описанном явлении основаны все радиоприемные устройства, неотъемлемой частью которых является колебательный контур с изменяемой резонансной частотой.

### 3.4.4. Мощность в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений напряжения (3.163) и силы тока (3.170):

$$P(t) = U(t)I(t) = U_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\varphi$  определяется соотношением (3.169):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = \frac{X}{R},$$

откуда можно получить

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}. \quad (3.181)$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

выражению для мгновенной мощности можно придать вид:

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(2\omega t - \varphi).$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение  $P(t)$ , которое мы просто обозначим  $P$ . Поскольку среднее значение  $\cos(2\omega t - \varphi)$  равно нулю, то

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi. \quad (3.182)$$

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность выделяется в активном сопротивлении в виде тепла.

Подставив значение  $\cos \varphi$  из (3.181) в (3.182) с учетом (3.172), получим:

$$P = \frac{RI_0^2}{2}. \quad (3.183)$$

Таковую же мощность развивает постоянный ток, сила которого

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.184)$$

Величина  $I_{\text{эф}}$  называется *действующим (эффективным) значением* силы тока. Аналогично величина

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (3.185)$$

называется *действующим (эффективным) значением* напряжения.

*Действующим (эффективным) значением* переменного тока называется такое значение постоянного тока, при котором на активном сопротивлении выделяется за период такое же количество теплоты, как и при переменном токе. Аналогично определяется и *действующее (эффективное) значение* напряжения.

Например, стандартное напряжение в сети 220 В – это эффективное напряжение. По формуле (3.185) легко рассчитать, что амплитудное значение напряжения в этом случае будет равно 311 В.

С использованием действующих значений формуле (3.182) для средней мощности можно придать вид

$$P = U_{\text{эф}} I_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (3.186)$$

В выражение для мощности входит множитель  $\cos \varphi$ , определяемый по формуле (3.181), который называют *коэффициентом мощности*. В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно больше. При малом  $\cos \varphi$  для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы. При этом возрастают потери в подводящих проводах, и приходится увеличивать их сечение.

На практике устанавливается предельно допустимое значение  $\cos \varphi$  для предприятия, при достижении которого возможно отключение его от внешней сети (например, при  $\cos \varphi \sim 0,85$ ). Для повышения  $\cos \varphi$  необходимо, как видно из векторной диаграммы (см. рис. 3.42), уравнивать амплитудные значения напряжения на емкости и индуктивности электрической цепи. Это может потребовать значительных капитальных вложений на переоборудование станочного парка на предприятии, изменение технологии. Быстро повысить  $\cos \varphi$  можно, увеличивая (см. (3.181)) активное сопротивление, подключая нагревательные элементы и осветительное оборудова-

ние. Вот почему иногда можно наблюдать картину включения освещения на территории предприятий в дневное время в условиях достаточной видимости.

### 3.4.5. Электромагнитные волны

Мы знаем, что переменные электрическое и магнитное поля взаимно порождают друг друга: переменное магнитное поле порождает электрическое (см. уравнение (3.142)), переменное электрическое поле порождает магнитное (см. уравнение (3.143)). Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс периодический во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Из уравнений Максвелла можно получить для векторов напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей так называемые *волновые уравнения* (связанные друг с другом), которые в одномерном случае имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (3.187)$$

Всякая функция, удовлетворяющая волновому уравнению, представляет собой волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (3.188)$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость электромагнитных волн в вакууме.

Поэтому Максвелл еще задолго до экспериментального подтверждения существования электромагнитных волн высказал гипотезу, что свет – это электромагнитные волны. Впервые экспериментально доказал существование электромагнитных волн Г. Герц в 1888 г., спустя 9 лет после смерти Максвелла.

Простейшими решениями уравнений (3.187) являются функции (уравнения плоской волны):

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \end{cases} \quad (3.189)$$

где циклическая частота волны  $\omega = 2\pi\nu$ , волновое число  $k = \omega / v = 2\pi / \lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны. Шкала электромагнитных волн, где представлено (в упрощенном виде) условное разбиение по длинам волн на диапазоны *радиоволн*, *световых волн*, *рентгеновского* и *гамма-излучения*, имеет следующий вид:

Радиоволны	Световые волны	R-излучение	$\gamma$ -излучение
$10^3 - 10^4$ м	$10^{-4} - 10^{-9}$ м	$10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$ м	$< 6 \cdot 10^{-12}$ м

Колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят с одинаковой фазой, а амплитуды этих векторов связаны соотношением:

$$E_m \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}, \quad (3.190)$$

т.е. по одному вектору однозначно определяется другой.

На рис. 3.44 представлено графическое изображение электромагнитной волны, описываемой уравнениями (3.189). Электромагнитные волны – поперечные волны: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  поля волны лежат в плоско-

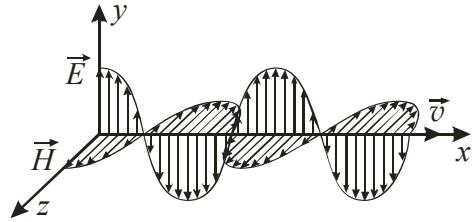


Рис. 3.44

сти, перпендикулярной направлению распространения волны. Кроме того, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  поля волны взаимно перпендикулярны, так что вектор скорости волны  $\vec{v}$  и векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют правую тройку. В фиксированной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через 1/4 периода достигают наибольшего значения, причем если  $\vec{E}$  направлен вверх, то  $\vec{H}$  направлен вправо (смотрим вдоль направления распространения волны). Еще через 1/4 периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз вектор  $\vec{E}$  направлен вниз, а  $\vec{H}$  – влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие

изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанными вдоль оси  $x$ .

Распространение всякой волны связано с переносом энергии. Электромагнитные волны также переносят энергию. Плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $\vec{v}$  (см. формулу (1.164)). В случае электромагнитных волн вектор плотности потока энергии принято обозначать буквой  $\vec{S}$ . Следовательно, модуль вектора  $\vec{S}$

$$S = w v. \quad (3.191)$$

Плотность энергии электромагнитного поля складывается из плотностей энергии электрического (3.58) и магнитного (3.136) полей:

$$w = w_{\vec{E}} + w_{\vec{H}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (3.192)$$

В вакууме и в непроводящей среде векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в каждой точке пространства в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (3.190) между амплитудами напряженностей электрического и магнитного полей справедливо и для их мгновенных значений.

Отсюда следует, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова:  $w_{\vec{E}} = w_{\vec{H}}$ . Поэтому можно написать, что  $w = 2w_{\vec{E}} = \epsilon_0 \epsilon E^2$ . Воспользовавшись тем, что  $E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$ , выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать следующий вид:

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} EH = \frac{EH}{v},$$

а выражению для плотности потока энергии – такой вид:

$$S = wv = EH.$$

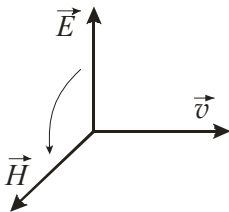


Рис. 3.45

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему (рис. 3.45). Поэтому направление вектора  $\vec{E} \times \vec{H}$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ .

Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = w\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3.193)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется *вектором Пойнтинга*. Поскольку векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются со временем по закону косинуса, модуль вектора Пойнтинга в каждой точке изменяется по закону квадрата косинуса. Среднее значение квадрата косинуса за период равно  $1/2$ . Поэтому среднее значение плотности потока энергии – *интенсивности волны*

$$J = \frac{E_m H_m}{2}. \quad (3.194)$$

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Соответствующий расчет показывает, что в случае идеально поглощающей поверхности давление электромагнитной волны равно ее объемной плотности энергии:  $p = w$ . Эта величина пульсирует с очень большой частотой. Поэтому практически может быть измерено ее среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle w \rangle. \quad (3.195)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Световое давление было измерено П.Н. Лебедевым. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

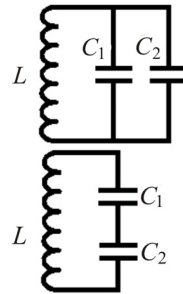
### Примеры решения задач

**№ 1.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура  $T_1 = 20$  мкс. Чему будет равен период колебаний  $T_2$ , если конденсаторы включить последовательно?

**Решение.** Период колебаний в колебательном контуре  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , где  $C$  – общая емкость батареи конденсаторов.

В первом случае:

$$C = C_1 + C_2 = 2C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{L \cdot 2C_1} = \sqrt{2} \cdot 2\pi\sqrt{LC_1}.$$



Во втором случае:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1^2}{2C_1} = \frac{C_1}{2}.$$

Тогда

$$T_2 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{LC_1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \pi \sqrt{LC_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \sqrt{LC_1}}{\sqrt{2} \cdot 2\pi \sqrt{LC_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} T_1 = 10 \text{ мкс.}$$

**№ 2.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 0,1 Гн и конденсатора емкостью 40 мкФ. Максимальный заряд конденсатора 3 мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите закон изменения силы тока в зависимости от времени.

Д а н о:  $L = 0,1$  Гн,  $C = 40$  мкФ,  $q_m = 3$  мкКл.

Р е ш е н и е. Предположим, что конденсатор имеет максимальный заряд в начальный момент времени. В этом случае закон изменения заряда удобно записать в виде

$$q = q_m \cos \omega t,$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Закон изменения тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin \omega t.$$

Найдем амплитуду тока:

$$I_m = q_m \omega = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 500 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Подставим ее в закон изменения тока и в результате получим (мА):  $I = -1,5 \cdot \sin 500t.$

**№ 3.** Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону  $U = 50 \cdot \cos(10^4 \pi \cdot t)$ . Емкость конденсатора  $C = 0,9$  мкФ. Найдите индуктивность контура, а также длину волны, соответствующую этому контуру.

Р е ш е н и е. Из закона изменения разности потенциалов  $\omega = 10^4 \pi$ . По определению  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Отсюда

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^8 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-6}} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$



Длина волны, излучаемой контуром,  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ , где  $c$  – скорость электромагнитной волны (скорость света) в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{10^4 \pi} = 6 \cdot 10^4 \text{ м} = 60 \text{ км.}$$

**№ 4.** Электромагнитная волна частотой  $\nu = 3$  МГц переходит из вакуума в диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon = 4$ . Насколько изменится длина волны?

**Р е ш е н и е.** При переходе из вакуума в диэлектрик меняется скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

где  $v$  – скорость волны в диэлектрике;  $c$  – скорость волны в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Длина волны в вакууме  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ , длина волны в диэлектрике

$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{\nu\sqrt{\epsilon}}$ . Отсюда изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = \frac{c}{\nu} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right) = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^6} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 50 \text{ м.}$$

**№ 5.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Поверхность площадью  $50 \text{ см}^2$  перпендикулярна скорости волны. За  $2$  с через поверхность переносится энергия  $10$  мкДж. Найдите интенсивность волны.

**Д а н о:**  $S = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $t = 2$  с;  $W = 10^{-5}$  Дж.

**Р е ш е н и е.** Интенсивностью волны называется среднее значение энергии, переносимой волной за единицу времени через единицу поверхности (см. подразд. 1.3.6). Поэтому интенсивность электромагнитной волны

$$J = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{10^{-5}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

## 4. ОПТИКА

*Оптика* – раздел физики, изучающий свойства и физическую природу света, а также его взаимодействие с веществом.

Свет представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как волна, в других – как поток особых частиц (*фотонов*). Такое свойство называется *корпускулярно-волновым дуализмом*.

*Волновая оптика* – раздел оптики, в котором свет рассматривается как электромагнитная волна, занимающая диапазон шкалы электромагнитных волн от 1 до  $10^5$  нм, включающих ультрафиолетовую (1–400 нм), видимую (400–750 нм) и инфракрасную (750– $10^5$  нм) области спектра. В волновой оптике изучаются явления интерференции, дифракции и поляризации.

*Квантовая оптика* – раздел оптики, в котором свет рассматривается как поток фотонов.

Однако многие оптические явления, в частности действие оптических приборов, можно рассматривать исходя из представления о световых лучах (*геометрическая, или лучевая, оптика*).

### 4.1. Элементы геометрической оптики

*Геометрическая оптика* – раздел оптики, в котором изучаются законы распространения света на основе представлений о световых лучах. Под *световым лучом* понимают линию, вдоль которой распространяется поток световой энергии.

#### 4.1.1. Основные законы геометрической оптики

В рамках геометрической оптики могут быть поняты простейшие оптические явления, например возникновение теней и получение изображений в оптических приборах. В ее основе лежат четыре закона, установленные опытным путем: 1) *закон прямолинейного распространения света*; 2) *закон независимости световых пучков*; 3) *закон отражения* и 4) *закон преломления света*.

Согласно закону прямолинейного распространения света, *свет в прозрачной однородной среде распространяется по прямым линиям*. Опытным доказательством этого закона могут служить резкие тени, отбрасываемые непрозрачными телами, осве-

щаемыми точечными источниками света, т.е. источниками, размеры которых малы по сравнению с размерами освещаемого тела и расстоянием до него.

Закон независимости световых пучков состоит в том, что *распространение всякого светового пучка совершенно не зависит от того, есть вокруг другие пучки света или нет*. Световой пучок, прошедший через какую-либо область пространства, выходит из нее одним и тем же, независимо от того, заполнена она другим светом или не заполнена. Закон независимости световых пучков необходимо дополнить утверждением, определяющим совместное действие световых пучков при их наложении друг на друга. Оно состоит в том, что освещенность экрана, создаваемая несколькими световыми пучками, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым пучком в отдельности.

На основе законов прямолинейного распространения и независимости световых пучков и сложилось представление о *световых лучах*. В математическом смысле *луч* есть линия, вдоль которой распространяется свет. Это – математическая абстракция. Реально существуют не математические лучи и бесконечно тонкие пучки света, а пучки конечного поперечного сечения, вырезаемые, например, диафрагмами. Поэтому под *лучом* в физическом смысле этого слова понимают конечный, но достаточно узкий световой пучок, который еще может существовать изолированно от других пучков.

Когда луч достигает плоской границы раздела двух прозрачных сред, он частично проходит во вторую среду (преломляется), частично возвращается обратно (отражается).

Закон отражения утверждает, что *падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью  $\vec{n}$  к границе раздела в точке падения (эта плоскость называется плоскостью падения), причем угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\alpha'$*  (рис. 4.1).

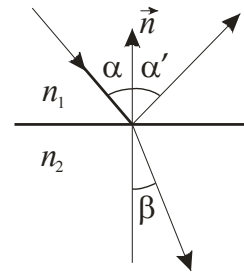


Рис. 4.1

Закон преломления был установлен экспериментально в 1621 г. голландским ученым Снеллиусом: *преломленный луч лежит в плоскости падения, причем отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$  для данных сред есть величина постоянная, не зависящая от угла падения (см. рис. 4.1), т.е.*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}. \quad (4.1)$$

Постоянная величина  $n_{21}$  называется *относительным показателем преломления второй среды относительно первой*. Показатель преломления среды относительно вакуума называется *абсолютным показателем преломления* этой среды. Его обозначают через  $n$ , снабжая эту букву, если требуется, соответствующими индексами. Например,  $n_1$  – показатель преломления первой среды, а  $n_2$  – второй. Относительный показатель преломления  $n_{21}$  выражается через абсолютные показатели  $n_1$  и  $n_2$  соотношением

$$n_{21} = n_2 / n_1. \quad (4.2)$$

Свет преломляется из-за различной скорости его распространения в разных средах. Абсолютный показатель преломления среды  $n$  показывает, во сколько раз скорость распространения света  $v$  в среде меньше, чем скорость света  $c$  в вакууме:

$$n = c / v. \quad (4.3)$$

Значение  $n$  для слабо поглощающих (прозрачных) твердых тел меняется от 1,3 до 4,0; для жидкостей – от 1,2 до 1,9; для газов (при нормальных условиях) – от 1,000035 (He) до 1,000702 (Xe).

Показатель преломления характеризует *оптическую плотность* среды. Среда с большим  $n$  называется *оптически более плотной*, чем среда с меньшим  $n$  (которая в этом случае называется *оптически менее плотной*).

На рис. 4.1 показан пример падения луча из среды оптически менее плотной в среду, оптически более плотную, при этом  $\alpha > \beta$  (в соответствии с законом (4.1)).

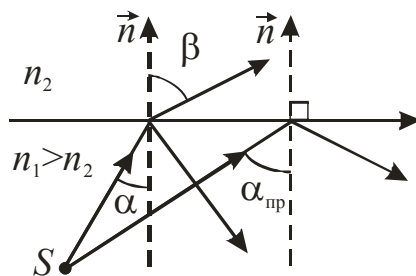


Рис. 4.2

При переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную луч отклоняется от нормали к поверхности (рис. 4.2). Увеличение угла падения  $\alpha$  сопровождается более быстрым ростом угла преломления  $\beta$ , и по достижении углом  $\alpha$  значения

$$\alpha_{\text{пр}} = \arcsin n_{21} \quad (4.4)$$

угол  $\beta$  становится равным  $\pi/2$ . Величину  $\alpha_{\text{пр}}$  называют *предельным углом падения*. При углах падения, больших  $\alpha_{\text{пр}}$ , свет во вторую среду не проникает, интенсивность отраженного луча равна интенсивности падающего. Это явление называется *полным внутренним отражением*.

Явление полного отражения света используется в различных областях науки и техники – от поляризационных устройств до световодов (оптоволокно).

#### 4.1.2. Линзы

*Линза* – прозрачное тело, ограниченное криволинейными (обычно сферическими) поверхностями (рис. 4.3). Прямая, проходящая через центры  $O_1$  и  $O_2$  образующих сфер, называется *главной оптической осью*. Если толщина линзы  $d$  много меньше радиусов  $R_1$  и  $R_2$  соответствующих сфер, то такая линза называется *тонкой*.

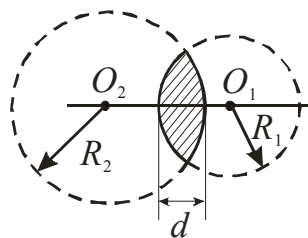


Рис. 4.3

По способности отклонять проходящие лучи тонкие линзы разделяются на *собирающие* и *рассеивающие*, схематическое обозначение которых и ход лучей показаны на рис. 4.4, а, б соответственно.

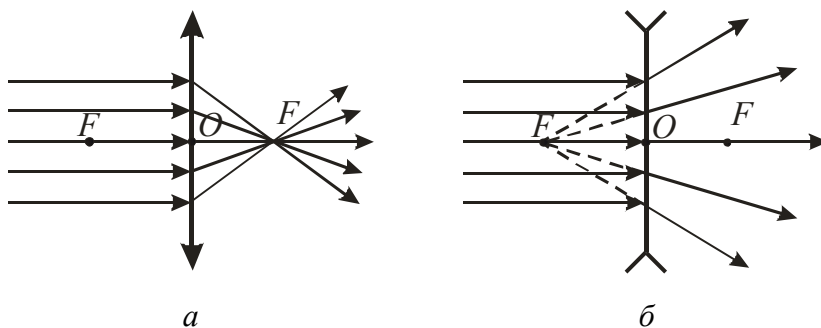


Рис. 4.4

Точка  $O$  пересечения главной оптической оси с тонкой линзой называется *оптическим центром* линзы. Лучи, проходящие через оптический центр, не преломляются. Пучок лучей, параллельных главной оптической оси собирающей линзы, преломляясь на линзе, пересекается в одной точке – *главном фокусе* линзы  $F$ . Для рассеивающей линзы в фокусе пересекаются продолжения лучей (см. рис. 4.4, б). У каждой линзы имеется два главных фокуса. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через фокус, называется *фо-*

кальной. Прямая, проходящая через оптический центр линзы, не совпадающая с главной оптической осью, называется *побочной оптической осью*. Точка пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью называется *побочным фокусом*  $F'$ . Пучок лучей, параллельных побочной оптической оси собирающей линзы, преломляясь на линзе, пересекается в *побочном фокусе* линзы  $F'$  (рис. 4.5).

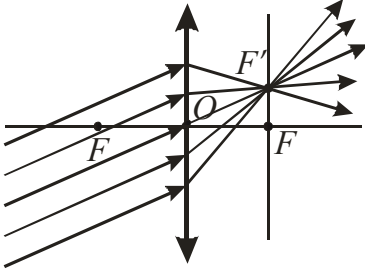


Рис. 4.5

Построение изображений на примере собирающей линзы приведено на рис. 4.6. Если предмет  $A_1B_1$  разместить от линзы на расстоянии меньше фокусного, то лучи от каждой точки предмета после преломления на линзе окажутся расходящимися, но их продолжения в обратную сторону пересекаются в точках расположения изображения.

Такое изображение называется *мнимым*. Итак, изображение  $A'_1B'_1$  предмета  $A_1B_1$  оказывается мнимым. На рис. 4.6 также видно, что оно оказывается увеличенным и прямым (неперевернутым).

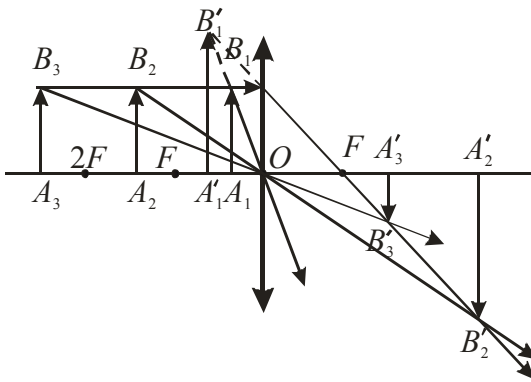


Рис. 4.6

Если предмет  $A_2B_2$  разместить между фокусом и точкой, расположенной от линзы на расстоянии, равном удвоенному фокусному, то изображение  $A'_2B'_2$  оказывается *действительным*, увеличенным и перевернутым. И, наконец, если предмет  $A_3B_3$  разместить за двойным фокусным

расстоянием, то изображение  $A'_3B'_3$  будет *действительным*, уменьшенным и перевернутым.

Расстояние до изображения можно рассчитать по *формуле тонкой линзы* (рис. 4.7):

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \pm \frac{1}{f}, \quad (4.5)$$

где  $a$  – расстояние от линзы до предмета;  $b$  – расстояние от линзы

до изображения, знак «+» ставится (получается), если изображение действительное, «-» – если изображение мнимое;  $f$  – расстояние от линзы до фокуса (*фокусное расстояние*), знак «+» ставится (получается), если линза собирающая, «-» – если рассеивающая.

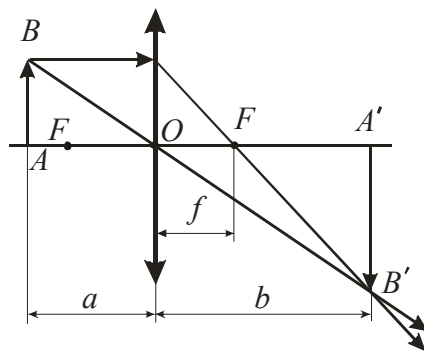


Рис. 4.7

Правая часть уравнения (4.5) определяет *оптическую силу* линзы  $D$ , которая измеряется в *диоптриях* (дптр):

$$D = \pm \frac{1}{f}. \quad (4.6)$$

Близорукие люди носят очки с рассеивающими линзами, оптическая сила которых отрицательна, дальнозоркие – с собирающими линзами, их оптическая сила положительна.

Еще одной характеристикой линзы является ее *линейное увеличение*:

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}. \quad (4.7)$$

### 4.1.3. Принцип Ферма

В однородной среде свет распространяется прямолинейно. В неоднородной среде световые лучи искривляются. Путь, по которому распространяется свет в неоднородной среде, может быть найден с помощью принципа, установленного французским математиком П. Ферма в 1662 г. Принцип Ферма гласит, что *свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время*.

Для прохождения участка пути  $ds$  свету нужно время

$$dt = ds/v = (1/c) n ds.$$

Следовательно, время  $\tau$ , затрачиваемое светом на прохождение пути от некоторой точки 1 до точки 2, можно вычислить по формуле

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds.$$

Согласно принципу Ферма  $\tau$  должно быть минимальным. Поскольку  $c$  – константа, то должна быть минимальной величина

$$L = \int_1^2 n ds, \quad (4.8)$$

которую называют *оптической длиной пути*. В однородной среде оптическая длина пути равна произведению геометрической длины пути  $s$  на показатель преломления среды  $n$ :

$$L = n s. \quad (4.9)$$

Принцип Ферма можно сформулировать следующим образом: *свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна*. Законы отражения и преломления можно доказать с помощью принципа Ферма.

### **Примеры решения задач**

**№ 1.** Световой луч падает нормально на поверхность пластинки толщиной 50 мм, имеющей показатель преломления 1,2. Чему равно время распространения луча в пластинке? Определите разницу между оптической и геометрической длинами пути этого луча.

**Д а н о:**  $H = 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $n = 1,2$ .

**Р е ш е н и е.** По определению абсолютный показатель преломления  $n = \frac{c}{v}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $v$  – скорость света в среде. Следовательно,  $v = \frac{c}{n}$ .

Свет в среде распространяется равномерно, отсюда время распространения луча в пластинке

$$t = \frac{H}{v} = \frac{H \cdot n}{c} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2}{3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ с} = 0,2 \text{ нс.}$$

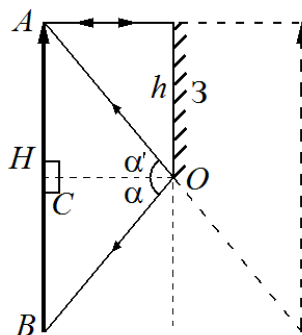
Геометрическая длина пути луча в пластине равна ее толщине ( $s = H$ ), а оптическая длина пути

$$L = n \cdot s = n \cdot H \Rightarrow \Delta L = n \cdot H - H = H(n - 1) = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 = 1 \text{ см.}$$

**№ 2.** Какова должна быть минимальная высота вертикального зеркала, чтобы человек ростом  $H$  мог видеть в нем свое изображение во весь рост? На какой высоте должен находиться нижний край этого зеркала?



**Решение.** Ход лучей, идущих от головы  $A$  и ног  $B$  человека, отраженных от зеркала  $З$  и попавших в глаз человека, показан на рисунке. Пунктирными линиями показаны продолжения лучей за плоскость зеркала и мнимое изображение человека.

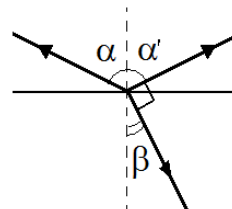


По закону отражения  $\alpha = \alpha'$ . Тогда

$$\triangle ACO = \triangle OCB \Rightarrow h = AC = CB = \frac{1}{2}H.$$

Нижний край зеркала должен находиться на высоте, равной половине роста человека.

**№ 3.** Луч света падает на стекло (показатель преломления 1,5). Преломленный луч перпендикулярен отраженному лучу. Чему равен угол падения?



**Решение.** По законам преломления и отражения

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n; \alpha = \alpha'$$

По рисунку видно, что

$$\beta = 360^\circ - (90^\circ + \alpha') = 90^\circ - \alpha' = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = n.$$

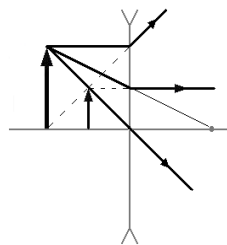
$$\text{Отсюда } \alpha = \operatorname{arctg} 1,5 = 56,3^\circ.$$

**№ 4.** Определите фокусное расстояние и оптическую силу линзы, если при расстоянии 20 см от линзы до предмета мнимое изображение получается на расстоянии 10 см от линзы.

**Дано:**  $a = 20$  см;  $b = 10$  см.

**Решение.** Формула тонкой линзы в случае мнимого изображения

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$



где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $a$  – расстояние от линзы до предмета;  $b$  – расстояние от линзы до изображения.

Отсюда

$$\frac{1}{f} = \frac{b-a}{a \cdot b} \Rightarrow f = \frac{a \cdot b}{a-b} = \frac{20 \cdot 10}{10-20} = -20 \text{ см} = -0,2 \text{ м.}$$

Знак «−» говорит о том, что линза рассеивающая. Оптическая сила

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{-0,2} = -5 \text{ дптр.}$$

## 4.2. Основы волновой оптики

### 4.2.1. Световая волна

В волновой оптике под светом понимают электромагнитную волну, распространяющуюся в вакууме со *скоростью света* (см. (3.188))

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Абсолютный показатель преломления среды (4.3) с учетом (3.190) можно связать с ее электрическими свойствами:

$$n = c/v = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon} \quad (4.10)$$

(для большинства прозрачных веществ  $\mu$  практически не отличается от единицы).

Напомним, что плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$ , показанная на рис. 3.44, описывается уравнениями (3.189):

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha). \end{cases}$$

Значение начальной фазы  $\alpha$  определяется выбором начал отсчета  $t$  или  $x$ .

В электромагнитной волне колеблются векторы напряженности электрического и магнитного полей. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями электрического вектора. В соответствии с этим будем в дальнейшем говорить о так называемом *све-*

товом векторе, подразумевая под ним вектор напряженности электрического поля.

Обозначим модуль амплитуды  $\vec{E}_m$  светового вектора буквой  $A$ . Закон, по которому изменяется во времени и в пространстве проекция светового вектора (см. рис. 3.44), называется *уравнением световой волны*,

$$E_y = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (4.11)$$

где  $A$  – амплитуда световой волны. Для плоской волны (4.11), распространяющейся в непоглощающей свет среде,  $A = \text{const}$ .

Для сферической волны  $A$  убывает, как  $1/r$ , поэтому

$$E = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (4.12)$$

где  $r$  – расстояние, отсчитываемое вдоль направления распространения световой волны.

*Интенсивность света*  $J$  (световой волны) согласно (3.194) пропорциональна амплитудам напряженностей электрического и магнитного полей волны, а следовательно, с учетом (3.190) пропорциональна квадрату амплитуды световой волны:

$$J \sim A^2. \quad (4.13)$$

Длины волн  $\lambda_0$  *видимого света* заключены в пределах 400–760 нм. *Ультрафиолетовым* называется излучение с длиной волны, меньшей 400 нм, *инфракрасным* – излучение с длиной волны, большей 760 нм.

Эти значения относятся к световым волнам в вакууме. В случае колебаний частоты  $\nu$  длина волны в вакууме  $\lambda_0 = c/\nu$ . В среде с показателем преломления  $n$  длины световых волн иные:

$$\lambda = v/\nu = c/(\nu n),$$

откуда

$$\lambda = \lambda_0/n. \quad (4.14)$$

Таким образом, в веществе длина волны в  $n$  раз меньше, чем в вакууме.

В случае, если абсолютный показатель преломления среды зависит от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda_0$ ) света, говорят о *дисперсии света*. Следствием дисперсии является разложение в спектр (от

красного до фиолетового) пучка белого света при прохождении его через призму.

Воспользовавшись условием (3.42) на границе двух диэлектриков, можно показать, что при отражении световой волны от границы среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной (при  $n_1 < n_2$ ), фаза колебаний светового вектора претерпевает изменение на  $\pi$ . При отражении от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной (при  $n_1 > n_2$ ), такого изменения фазы не происходит.

*Монохроматическая* световая волна (т.е. волна с точно определенной частотой), описываемая уравнениями (4.11) или (4.12), представляет собой процесс, не ограниченный во времени и в пространстве (см. рис. 3.44). Такая волна является абстракцией и практически реализоваться не может. В реальной световой волне фаза (а также амплитуда и частота) изменяется беспорядочным образом с течением времени, а также при перемещении от одной точки пространства к другой, поскольку является наложением волн с длинами волн, заключенными в некотором интервале  $\Delta\lambda$ . В *белом свете*  $\Delta\lambda$  охватывает весь диапазон воспринимаемых глазом электромагнитных волн, т.е. простирается от 400 до 760 нм. Свет, у которого  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , называется *квазимонохроматическим* (лат. «квази» означает «мнимо»).

## 4.2.2. Интерференция света

### *Понятие интерференции*

Пусть две световые волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Амплитуда  $A$  результирующего колебания в данной точке определяется выражением (1.114):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а интенсивность света (с учетом (4.13))

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1J_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4.15)$$

Если разность фаз ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ) возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются *когерентными*. Источники таких волн также называются *когерентными*.

В более широком смысле *когерентностью* называется *согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов*.

Когерентность колебаний, которые совершаются в одной и той же точке пространства, определяемая степенью монохроматичности волн, называется *временной когерентностью*.

В случае когерентных волн  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$  имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение. В тех точках пространства, для которых  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) > 0$ ,  $J$  будет превышать ( $J_1 + J_2$ ); в точках, для которых  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) < 0$ ,  $J$  будет меньше ( $J_1 + J_2$ ). Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение в пространстве энергии световых электромагнитных волн, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называется *интерференцией света*.

Особенно отчетливо интерференция проявляется в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн одинакова:  $J_1 = J_2$ . Тогда согласно (4.15) в минимумах (при  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ ) интенсивность  $J = 0$ , в максимумах (при  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ ) интенсивность  $J = 4 J_1$ .

У реальной световой волны фаза непрерывно хаотически изменяется во времени. В этом случае разность фаз ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ) непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее по времени значение  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$  равно нулю. Интенсивность в каждой точке пространства, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:  $J = J_1 + J_2$ .

При освещении какой-либо поверхности несколькими источниками света (например, двумя лампочками), никакой интерференционной картины с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов не наблюдается. Это объясняется тем, что естественные источники света некогерентны. А само понятие когерентности требует более подробного рассмотрения.

### *Когерентность и «механизм» излучения света атомами*

По классическим представлениям, излучение светящегося тела (газа) складывается из волн, испускаемых его атомами, которые излучают независимо друг от друга. В каждом из таких атомов процесс излучения конечен и длится очень короткое время ( $\tau \approx 10^{-8}$  с). Волна в виде короткого импульса называется *волновым цугом* (см. рис. 1.30, б). За время  $\tau$  успевает образоваться цуг волн протяженностью примерно 3 м. На длине цуга укладывается несколько миллионов длин волн (видимого света).

За время  $\tau$  возбужденный атом возвращается в нормальное состояние и излучение им света прекращается. Возбуждившись вновь, атом снова начинает испускать световые волны, причем фаза нового цуга никак не связана с фазой предыдущего цуга. Поскольку в любой точке пространства разность фаз колебаний в цугах от двух таких независимых атомов изменяется при каждом новом акте испускания, то волны, *спонтанно* излучаемые атомами любого источника света, *некогерентны*.

Фаза волны определяется наложением (суперпозицией) огромного числа цугов, порождаемых отдельными атомами, причем фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения. Сменяет друг друга в некоторой точке пространства в данный момент времени относительно небольшое число цугов. Подавляющее большинство цугов проходит через рассматриваемую точку не прерываясь. Поэтому фаза волны, образованной наложением огромного числа цугов, порождаемых отдельными атомами, не может совершать больших скачков. Она изменяется случайным образом небольшими шагами или, как говорят, совершает случайные блуждания.

Время  $\tau_{\text{ког}}$ , за которое случайное изменение фазы волны достигает значения порядка  $\pi$ , называется *временем когерентности*. За это время колебание как бы забывает свою первоначальную фазу и становится некогерентным по отношению к самому себе.

Соответствующий оценочный расчет показывает, что время когерентности обратно интервалу частот  $\Delta\nu$  (длин волн  $\Delta\lambda$ ), представленных в данной световой волне:

$$\tau_{\text{ког}} \approx 1/\Delta\nu = (1/v) \lambda^2/\Delta\lambda, \quad (4.16)$$

где  $v$  – скорость распространения волны в данной среде. Чем шире интервал частот (длин волн) представленных в волне, тем меньше время когерентности этой волны. Для монохроматической волны  $\Delta\nu = 0$  и время когерентности бесконечно велико.

Путь волны в среде за время когерентности называется *длиной когерентности*:

$$\ell_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}}. \quad (4.17)$$

Длина когерентности – то расстояние, на котором случайные изменения фазы волны достигают значения порядка  $\pi$ .

В качестве примера оценим время и длину когерентности для случая  $\lambda = 500$  нм (зеленая часть спектра) и  $\Delta\lambda = 1$  нм (1/360 часть видимого спектра). Согласно (4.16) и (4.17)

$$\tau_{\text{ког}} \approx (1/c) \lambda^2/\Delta\lambda \approx 10^{-12} \text{ с}, \quad \ell_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} \approx 0,3 \text{ мм}.$$

Чем ближе волна к монохроматической, тем больше ее время и длина когерентности.

В реальной световой волне амплитуда и фаза колебаний изменяются не только вдоль направления распространения волны, но и в плоскости, перпендикулярной к этому направлению. Когерентность колебаний, которые совершаются в двух точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, называется *пространственной когерентностью*. Случайные изменения разности фаз в двух точках этой плоскости увеличиваются с расстоянием между ними. Расстояние  $r_{\text{ког}}$ , на котором разность фаз достигает значения порядка  $\pi$ , называется *длиной пространственной когерентности* или *радиусом когерентности*.

Все пространство, занимаемое волной, можно разбить на части, в каждой из которых волну можно приближенно считать монохроматической, т.е. она обладает когерентными свойствами. Объем такой части пространства, называемый *объемом когерентности*, по порядку величины равен произведению длины когерентности на площадь круга с радиусом, равным радиусу когерентности (рис. 4.8).

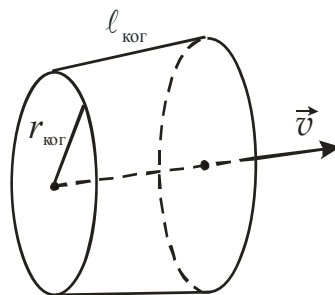


Рис. 4.8

### Интерференционная картина от двух источников

Волны, излучаемые обычными источниками света, являются некогерентными, вследствие чего получить интерференцию волн от таких источников нельзя.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если затем наложить эти две волны друг на друга, наблюдается интерференция. Разность оптических длин путей, проходимых волнами, не должна превышать длину когерентности, иначе разность фаз накладывающихся колебаний будет изменяться хаотическим образом.

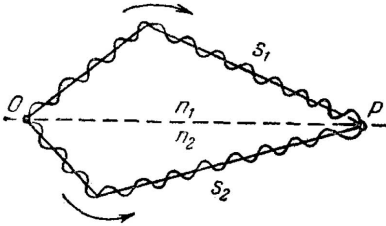


Рис. 4.9

Предположим, что разделение на две когерентные волны происходит в точке  $O$  (рис. 4.9). До точки  $P$  первая волна проходит в среде с показателем преломления  $n_1$  путь  $s_1$ , вторая волна проходит в среде с показателем преломления  $n_2$  путь  $s_2$ . Если в точке  $O$  фаза колебания равна

$\omega t$ , то первая волна возбудит в точке  $P$  колебание  $A_1 \cos(\omega(t - s_1/v_1))$ , а вторая волна – колебание  $A_2 \cos(\omega(t - s_2/v_2))$ , где  $v_1$  и  $v_2$  – фазовые скорости волн,  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$ . Следовательно, разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке  $P$ ,

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Заменив  $\omega/c$  следующим образом:  $2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  – длина волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (4.18)$$

где  $\Delta$  – величина, равная разности оптических длин проходимых волнами путей и называемая *оптической разностью хода*:

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1. \quad (4.19)$$

Из (4.18) видно, что если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.20)$$

то разность фаз  $\delta$  оказывается кратной  $2\pi$  и колебания, возбуждаемые в точке  $P$  обеими волнами, будут происходить с одинаковой



фазой. Таким образом, соотношение (4.20) определяет *условие интерференционного максимума*.

Если оптическая разность хода равна полуцелому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm(m + 1/2)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.21)$$

то  $\delta = \pm(2m + 1)\pi$ , так что колебания в точке  $P$  совершаются в противофазе. Следовательно, соотношение (4.21) определяет *условие интерференционного минимума*.

Наблюдение интерференции двух волн возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности:

$$\Delta < \ell_{\text{ког}}. \quad (4.22)$$

Все методы получения когерентных источников света сводятся к одному – разделению одного пучка от источника на две части и дальнейшему их сведению в одну точку. Практически это можно осуществить с помощью щелей (метод Юнга), зеркал (зеркала Френеля), преломляющих тел (бипризма Френеля) и т.д.

В качестве примера рассмотрим *метод Юнга*. Источником света служит ярко освещенная щель  $S$  (рис. 4.10), от которой световая волна падает на две узкие равноудаленные щели  $S_1$  и  $S_2$ , параллельные щели  $S$ . Таким образом, щели  $S_1$  и  $S_2$  играют роль когерентных источников света.

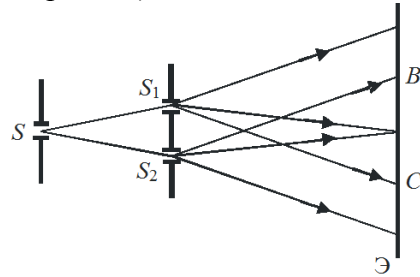


Рис. 4.10

Рассмотрим две когерентные световые волны, исходящие от источников  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 4.11).

Область, в которой эти волны перекрываются, называется *полем интерференции*. В этой области наблюдается чередование мест с максимальной и минимальной интенсивностью света. Если в поле интерференции внести экран, то на нем (область  $BC$  на рис. 4.10) будет видна интерференци-

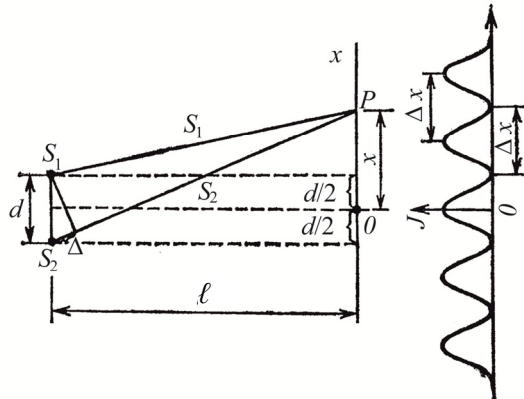


Рис. 4.11

онная картина, которая имеет вид чередующихся светлых и темных полос. Вычислим координаты этих полос в предположении, что экран параллелен плоскости, в которой лежат источники  $S_1$  и  $S_2$ .

Возьмем на экране координатную ось  $x$ , перпендикулярную к  $S_1$  и  $S_2$ . Начало координат поместим в точке  $O$ , относительно которой  $S_1$  и  $S_2$  расположены симметрично. Источники будем считать колеблющимися в одинаковой фазе. По рис. 4.11 видно, что

$$s_1^2 = \ell^2 + (x - d/2)^2, \quad s_2^2 = \ell^2 + (x + d/2)^2,$$

откуда

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 2xd.$$

Для получения различимой интерференционной картины расстояние  $d$  между источниками должно быть значительно меньше расстояния  $\ell$  до экрана. Расстояние  $x$ , в пределах которого образуются интерференционные полосы, также бывает значительно меньше  $\ell$ . При этих условиях можно считать, что  $s_2 + s_1 \approx 2\ell$ . Тогда  $s_2 - s_1 = xd/\ell$ . Умножив  $(s_2 - s_1)$  на показатель преломления среды  $n$ , получим оптическую разность хода:

$$\Delta = n \frac{xd}{\ell}. \quad (4.23)$$

Если подставить это значение  $\Delta$  в условие (4.20), то максимумы интенсивности будут наблюдаться при следующих значениях  $x$ :

$$x_{\max} = \pm m \frac{\ell}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.24)$$

где  $\lambda$  – длина волны в среде, заполняющей пространство между источниками света и экраном,  $\lambda = \lambda_0/n$ . Подставив значение (4.23) в условие (4.21), получим координаты минимумов интенсивности:

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\ell}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.25)$$

Назовем расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности – *шириной интерференционной полосы*. Из формул (4.24) и (4.25) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение

$$\Delta x = \frac{\ell}{d} \lambda. \quad (4.26)$$

### **Интерференция света при отражении от тонких пленок**

При падении световой волны на тонкую прозрачную пленку или пластинку происходит отражение от обеих поверхностей пленки. В результате возникают две световые волны, которые при известных условиях могут интерферировать.

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская световая волна, которую можно рассматривать как параллельный пучок лучей. На рис. 4.12 изображен один из лучей этого пучка. Пластинка отбрасывает вверх два параллельных пучка света примерно одинаковой интенсивности, один из которых (пучок 1) образуется за счет отражения от верхней поверхности пластинки, другой (пучок 2) – за счет отражения от нижней поверхности. При входе в пластинку и при выходе из нее второй пучок претерпевает преломление.

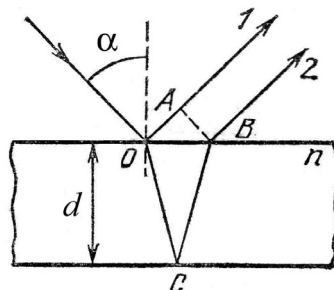


Рис. 4.12

Если оптическая разность хода лучей 1 и 2 меньше длины когерентности исходной волны, то волны, представленные этими лучами, когерентны и могут интерферировать. На дальнейшем пути лучей от точек A и B разность фаз волн 1 и 2 не изменяется. Поэтому оптическая разность хода лучей 1 и 2

$$\Delta = ns_2 - s_1, \quad (4.27)$$

где  $n$  – показатель преломления пластинки;  $s_2$  – суммарная длина отрезков  $OC$  и  $CB$ ;  $s_1$  – длина отрезка  $OA$ . Показатель преломления среды, окружающей пластинку, полагаем равным единице.

Оптическую разность хода (4.27) можно с учетом закона преломления (4.1) выразить через угол падения  $\alpha$ :

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

При вычислении разности фаз  $\delta$  между колебаниями в лучах 1 и 2 нужно, кроме оптической разности хода, учесть возможность изменения фазы волны при отражении. В точке  $O$  отражение происходит от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной. Поэтому фаза волны изменяется на  $\pi$ . В точке  $C$  отражение происходит от границы раздела среды,

оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной, так что изменения фазы не происходит. В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$ . Ее можно учесть, добавив к оптической разности хода половину длины волны в вакууме. В результате получим:

$$\Delta' = \Delta + \lambda_0 / 2 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \lambda_0 / 2. \quad (4.28)$$

Если на пути лучей 1 и 2 поставить собирающую линзу, они сойдутся в одной из точек фокальной плоскости линзы и будут интерферировать (роль линзы может играть хрусталик глаза, а роль экрана – сетчатка). Результат интерференции зависит от значения величины (4.28). Условие максимума (4.20) принимает вид

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (m - 1/2)\lambda_0, \quad (4.29)$$

где  $m$  – целое число. При падении под углами, для которых

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = m\lambda_0, \quad (4.30)$$

отраженные волны гасят друг друга, так что свет практически не отражается.

Если на пластинку падает *рассеянный* (разнообразных направлений) монохроматический свет, то на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается чередование светлых и темных полос (кольца с общим центром), соответствующих лучам, падающим на пластинку под определенным углом. Такие интерференционные полосы называются *полосами равного наклона*.

Если падающий свет немонахроматичен, т.е. содержит диапазон частот (например, белый свет), то интерференционная картина приобретает радужную окраску.

Если монохроматический свет падает на *пластинку переменной толщины* (например, *клин*), то даже для лучей, падающих под определенным углом, на экране возникнет чередование светлых и темных полос (интерференционная картина). Это объясняется тем, что условие максимума (4.29) выполняется для лучей, падающих на пластинку в местах с определенной толщиной  $d$ . Такие полосы называются *полосами равной толщины*.

Заметим, что интерференция от тонких пленок может наблюдаться не только в отраженном, но и в проходящем свете.

Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они могут наблюдаться при отражении света от соприкасающихся толстой плоскопараллельной пластинки и плосковыпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 4.13).

Роль тонкой пленки, от поверхностей которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой (вследствие большой толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают). При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей (рис. 4.14), при наклонном падении – эллипсов. Найдем радиусы колец Ньютона в отраженном свете, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае оптическая разность хода равна удвоенной толщине  $b$  зазора (предполагается, что в зазоре  $n = 1$ ). По рис. 4.13 можно определить, что

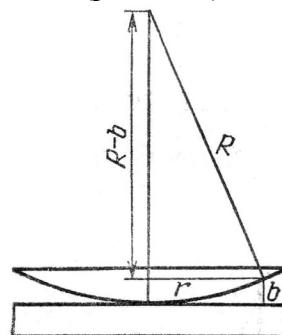


Рис. 4.13

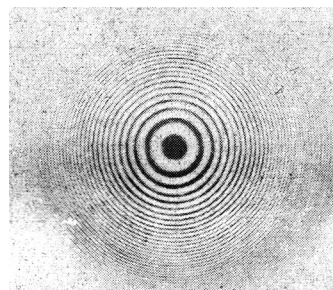


Рис. 4.14

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2,$$

где  $R$  – радиус кривизны линзы;  $r$  – радиус окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор  $b$ . Ввиду малости  $b$  мы пренебрегли  $b^2$  по сравнению с  $2Rb$ . Из этого соотношения следует, что

$$b = r^2 / 2R.$$

Следовательно, с учетом (4.28) и (4.29) для светлых колец в отраженном свете при нормальном падении лучей получаем (учитывая потерю полуволны при отражении от оптически более плотной среды):

$$2b = r^2 / R = (m - 1/2)\lambda_0,$$

откуда

$$r_{\text{св}} = \sqrt{R\lambda_0(2m - 1)/2} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.31)$$

Из (4.30) получаем условие для темных колец (в отраженном свете):

$$r_{\text{тёмн}} = \sqrt{R\lambda_0 m} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.32)$$

В месте касания пластинки и линзы наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы на  $\pi$  при отражении световой волны от пластинки (оптически более плотной).

### 4.2.3. Дифракция

#### Принцип Гюйгенса – Френеля

Под *дифракцией* понимают любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики (например, огибание волнами встреченных препятствий).

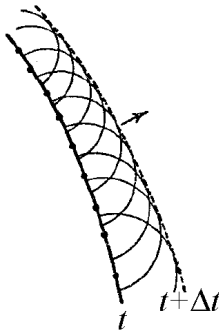


Рис. 4.15

Возникновение дифракции можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса, которым устанавливается способ построения фронта волны в момент времени  $(t + \Delta t)$  по известному положению фронта в момент времени  $t$ : каждая точка фронта волны служит центром (источником) вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент времени (рис. 4.15).

Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 4.16). По Гюйгенсу, каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рис. 4.16 границы этой области показаны пунктиром), огибая края преграды.

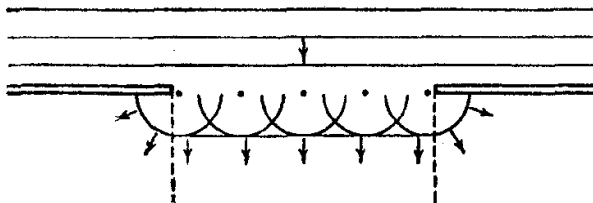


Рис. 4.16

Однако принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об амплитуде, а следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем, который дополнил принцип Гюйгенса: *вторичные источники (излучающие преимущественно по нормали к фронту волны) когерентны между собой, а новое положение фронта волны – результат интерференции волн от вторичных источников*. Иначе говоря, *любая волна – результат суперпозиции когерентных вторичных волн, излучаемых фиктивными (вторичными) источниками*.

Уточнение Френелем принципа Гюйгенса «стирает» различие между явлениями интерференции и дифракции. Под интерференцией следует понимать суперпозицию когерентных волн от конечного числа источников, а под дифракцией – от бесконечного (распределенных равномерно по фронту волны или волновой поверхности).

Различают два вида дифракции. Если источник света и точка наблюдения  $P$  расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку  $P$ , образуют практически параллельные пучки, говорят о *дифракции Фраунгофера* или о *дифракции в параллельных лучах*. В противном случае говорят о *дифракции Френеля*. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать, поместив за источником света  $S$  и перед точкой наблюдения  $P$  по линзе так, чтобы точки  $S$  и  $P$  оказались в фокальной плоскости соответствующей линзы (рис. 4.17).

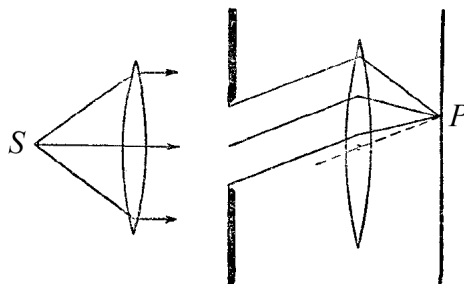


Рис. 4.17

### Зоны Френеля

Метод Френеля объясняет прямолинейность распространения света в свободной от препятствий однородной среде. Чтобы показать это, рассмотрим действие сферической световой волны от точечного источника  $S$  в произвольной точке пространства  $P$  (рис. 4.18). Волновая поверхность симметрична относительно прямой  $SP$ .

Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности.

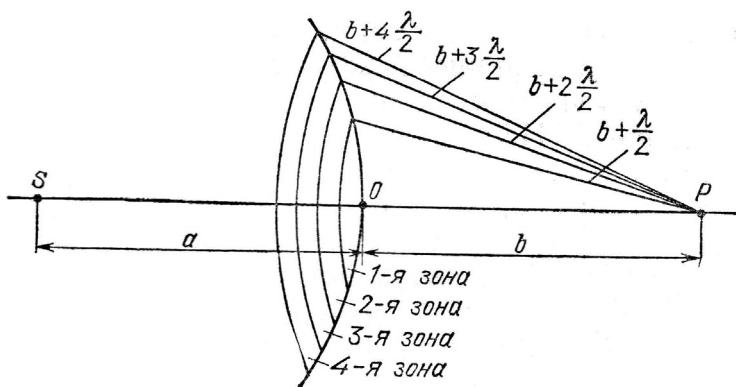


Рис. 4.18

Поверхность разбивается на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев соседних зон до точки  $P$  отличаются на  $\lambda/2$  ( $\lambda$  – длина световой волны в той среде, в которой распространяется волна). Колебания, приходящие в точку  $P$  от аналогичных точек двух соседних зон, противоположны по фазе, так как разность хода от этих зон до точки  $P$  равна  $\lambda/2$ . При наложении эти колебания взаимно ослабляют друг друга. Результирующая амплитуда в точке  $P$  выразится суммой:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (4.33)$$

Величина амплитуды  $A_k$  зависит от площади  $k$ -й зоны и угла между внешней нормалью к поверхности зоны и прямой, направленной из этой точки в точку  $P$ .

Можно показать, что площади всех зон Френеля равновелики и, следовательно, мощности излучения вторичных источников одинаковы. Но с увеличением  $k$  возрастает угол между нормалью к поверхности и направлением в точку  $P$ , что приводит к уменьшению интенсивности излучения  $k$ -й зоны в данном направлении, т.е. к уменьшению амплитуды  $A_k$  по сравнению с амплитудами предыдущих зон. Амплитуда  $A_k$  уменьшается также вследствие увеличения расстояния от зоны до точки  $P$  с ростом номера зоны. В итоге

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots > A_k > \dots \quad (4.34)$$

Вследствие большого числа зон убывание  $A_k$  носит монотонный характер, и приближенно можно считать, что

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2}. \quad (4.35)$$



Перепишав (4.33) в следующем виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots, \quad (4.36)$$

обнаруживаем, что согласно (4.35) выражения в скобках равны нулю и уравнение (4.33) приводится к виду

$$A = A_1/2. \quad (4.37)$$

Полученный результат означает, что колебания, вызываемые в точке  $P$  полностью открытой сферической волновой поверхностью, имеют такую же амплитуду, как если бы действовала только половина центральной зоны Френеля. Следовательно, свет от источника  $S$  в точку  $P$  распространяется в пределах очень узкого прямого канала, т.е. прямолинейно.

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке  $P$  будет равна  $A_1$ , т.е. в два раза превзойдет амплитуду (4.37). Соответственно интенсивность в точке  $P$  будет в этом случае в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками  $S$  и  $P$ .

Пусть волна от источника  $S$  встречает на пути непрозрачный экран с круглым отверстием (рис. 4.19,  $a$ ). Результат дифракции наблюдается на экране, параллельном плоскости отверстия. Дифракционный эффект в точке  $P$  экрана, расположенной против центра отверстия, зависит от того, сколько зон Френеля укладывается на открытой части волнового фронта. Если в отверстии укладывается ровно  $k$  зон Френеля, то амплитуда

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_k. \quad (4.38)$$

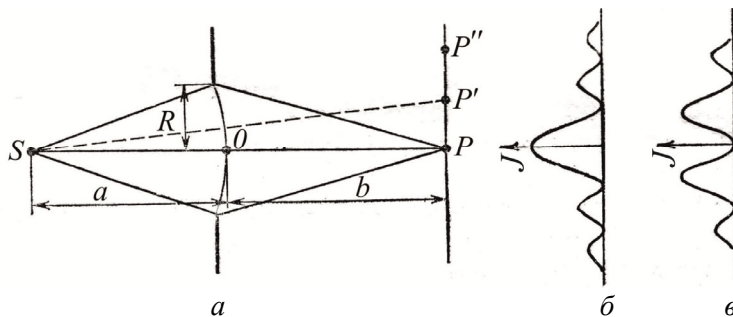


Рис. 4.19

Если число зон  $k$  невелико, то амплитуды колебаний в точке  $P$  от двух соседних зон мало отличаются по величине, а результат опреде-

ляется четностью или нечетностью числа  $k$ . Если число открытых зон четно, то колебания от соседних зон погашают друг друга и в точке  $P$  наблюдается минимум интенсивности; если же число зон нечетно, то одна зона оказывается нескомпенсированной и в точке  $P$  наблюдается максимум интенсивности (как от одной зоны). Распределение интенсивности света на экране в случае нечетного числа зон приведено на рис. 4.19, б; в случае четного – на рис. 4.19, в.

При увеличении числа зон  $k$  амплитуда  $A_k$  стремится к нулю ( $A_k \ll A_1$ ). Никакой интерференционной картины на экране не будет – свет в этом случае практически распространяется так же, как и при отсутствии экрана с отверстием, т.е. прямолинейно. Отсюда следует вывод о том, что следствия волновых представлений и представлений о прямолинейном распространении света начинают совпадать тогда, когда число открытых зон велико.

При размещении между источником  $S$  и экраном круглого непрозрачного диска закрывается одна или несколько первых зон Френеля. Если диск закроет  $k$  зон Френеля, то в точке  $P$  амплитуда суммарной волны

$$A = A_{k+1} - A_{k+2} + A_{k+3} - \dots = \frac{A_{k+1}}{2} + \left( \frac{A_{k+1}}{2} - A_{k+2} + \frac{A_{k+3}}{2} \right) + \dots$$

Поскольку выражения в скобках можно принять равными нулю (см. (4.35)), получаем:  $A = \frac{A_{k+1}}{2}$ .

Таким образом, в случае круглого непрозрачного диска в центре картины (точка  $P$ ) при любом (как четном, так и нечетном)  $k$  получается светлое пятно.

Если диск закрывает лишь часть первой зоны Френеля, тень на экране отсутствует, освещенность во всех точках такая же, как и при отсутствии преграды. Интенсивность центрального максимума ослабевает при увеличении размеров диска ( $A_{k+1} \ll A_1$ ). Если диск закрывает много зон Френеля, интенсивность света в области геометрической тени практически всюду равна нулю и лишь вблизи границ наблюдается слабая интерференционная картина. В этом случае можно пренебречь явлением дифракции и пользоваться законом прямолинейного распространения света.

### ***Дифракция Фраунгофера на щели***

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально на щель шириной  $b$ . Рассмотрим лучи, идущие от вторичных источников

на открытой части волновой поверхности под углом  $\varphi$  (рис. 4.20).

Если разность хода от краев щели равна  $\pm k\lambda$ , открытую часть волновой поверхности можно разбить на  $2k$  равных по ширине зон (зон Френеля), причем разность хода от краев каждой зоны равна  $\lambda/2$  (рис. 4.21).

Колебания, посылаемые в точку наблюдения  $P$  соответствующими участками двух соседних зон (например, помеченными крестиками участками зон 1 и 2), находятся в противофазе. Поэтому колебания от каждой пары соседних зон взаимно погашают друг друга и результирующая амплитуда в точке  $P$  равна нулю. При  $\Delta = \pm (2k + 1)\lambda/2$  число зон нечетное, действие одной из них окажется нескомпенсированным, так что будет наблюдаться максимум интенсивности.

С учетом выражения для разности хода от краев щели (см. рис. 4.20)  $\Delta = b \sin\varphi$  условия максимумов и минимумов при дифракции на щели можно записать следующим образом:

– условия максимума:

$$b \sin\varphi = \pm (m + 1/2)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (4.39)$$

– условия минимума:

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.40)$$

В середине симметричной дифракционной картины, состоящей из чередующихся светлых и темных полос, всегда образуется максимум освещенности (при  $\varphi = 0$  щель действует как одна зона Френеля).

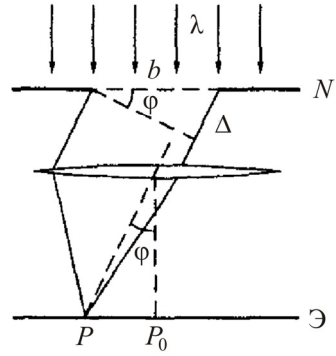


Рис. 4.20

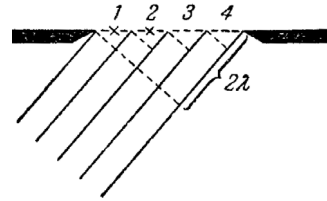


Рис. 4.21

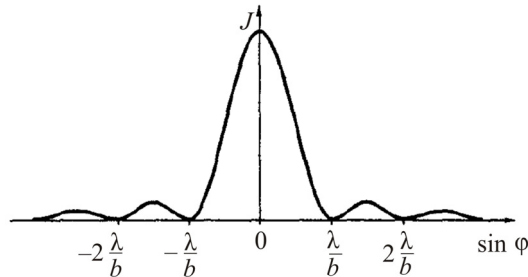


Рис. 4.22

Интенсивность  $J$  света на экране зависит от угла дифракции (рис. 4.22), при этом интенсивность второго максимума составляет около 4 % от интенсивности центрального.

### Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей (рис. 4.23). Расстояние  $d$  между серединами соседних щелей называется *постоянной* или *периодом* решетки.

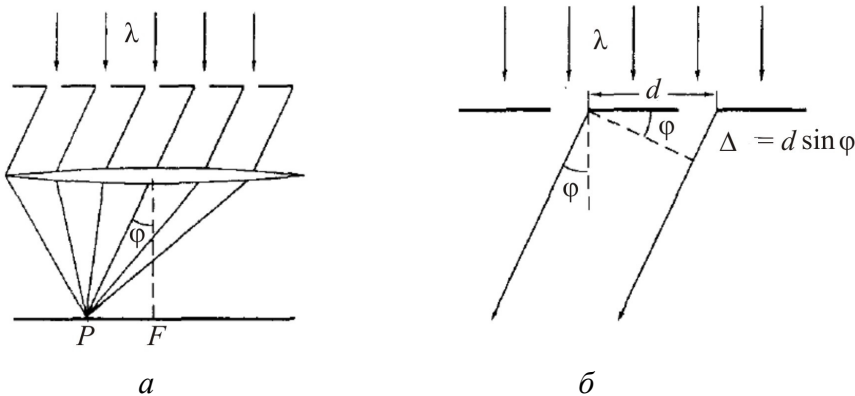


Рис. 4.23

На дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных пучков света, идущих от всех щелей (см. рис. 4.23, *a*).

Если каждая щель в одном направлении не распространяет свет, то он не будет распространяться и при большем количестве щелей, т.е. условие минимума (4.40) для щели справедливо и для решетки.

Разности хода лучей от двух соседних щелей одинаковы в пределах всей дифракционной решетки (см. рис. 4.23, *б*):  $\Delta = d \sin \varphi$ . Следовательно, разность фаз  $\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$ , где  $\lambda$  – длина волны в данной среде.

Для тех направлений, для которых  $\delta = \pm 2\pi m$ , т.е. при условии, что

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.41)$$

колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга. Та-

ким образом, условие (4.41) определяет положения максимумов интенсивности, называемых *главными*. Число  $m$  показывает так называемый *порядок* главного максимума. Максимум нулевого порядка только один, максимумов остальных порядков – по два.

Кроме минимумов, определяемых условием (4.40), в промежутках между соседними главными максимумами имеется по  $(N - 1)$ -му добавочному минимуму ( $N$  – число щелей). Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. Направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots). \quad (4.42)$$

Здесь  $k'$  принимает все целочисленные значения, кроме 0,  $N$ ,  $2N$ , ..., т.е. кроме тех, при которых условие (4.42) переходит в условие (4.41). Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы.

### ***Характеристики спектрального прибора***

Из формулы (4.41) следует, что направления на главные максимумы зависят от длины световой волны (за исключением максимума нулевого порядка при  $m = 0$ ). Поэтому решетка в каждом порядке ( $m \neq 0$ ) разлагает падающий на нее свет в спектр, т.е. является спектральным прибором. Наибольшее отклонение в каждом порядке испытывает красная часть спектра (более длинноволновая).

Основными характеристиками любого спектрального прибора являются угловая дисперсия и разрешающая способность.

*Угловая дисперсия*  $D_{\text{угл}}$  характеризует степень пространственного (углового) разделения волн с различными  $\lambda$  и определяет угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на 1 нм). По определению

$$D_{\text{угл}} = \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (4.43)$$

Взяв дифференциал от соотношения (4.41) при данном  $m$ , находим для решетки:  $d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda$ , откуда

$$D_{\text{угл}} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (4.44)$$

Видно, что для заданного порядка  $m$  спектра угловая дисперсия тем больше, чем меньше период  $d$  решетки. Кроме того,  $D_{\text{угл}}$  растет с увеличением угла дифракции  $\varphi$ .

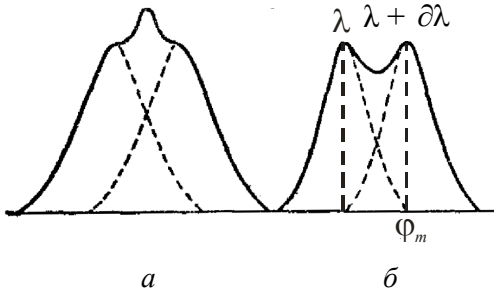


Рис. 4.24

Возможность *разрешения* (т.е. отдельного восприятия) двух близких спектральных линий зависит не только от расстояния между ними (которое определяется дисперсией прибора), но и от ширины спектрального максимума. На рис. 4.24 показана

результатирующая интенсивность (сплошные кривые), наблюдающаяся при наложении двух близких максимумов (пунктирные кривые). В случае на рис. 4.24, *а* оба максимума воспринимаются как один. В случае на рис. 4.24, *б* между максимумами лежит минимум. Согласно критерию, предложенному Рэлеем, спектральные линии разных длин волн, но одинаковой интенсивности считаются полностью разрешенными, если середина одного максимума (для длины волны  $\lambda$ ) совпадает с краем другого – с минимумом для длины волны  $(\lambda + \delta\lambda)$  (см. рис. 4.24, *б*). В этом случае между двумя максимумами возникает провал, составляющий около 20 % от интенсивности в максимумах, и линии еще воспринимаются отдельно. Такое взаимное расположение максимумов получается при определенном (для данного прибора) значении  $\delta\lambda$ .

*Разрешающей способностью*  $R_{\text{пр}}$  спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R_{\text{пр}} = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (4.45)$$

где  $\delta\lambda$  – наименьшая разность длин волн двух спектральных линий в окрестности  $\lambda$ , при которой эти линии воспринимаются еще в спектре отдельно, т.е. разрешаются.

Итак, согласно критерию Рэля необходимо, чтобы максимум  $m$ -го порядка линии с длиной волны  $(\lambda + \delta\lambda)$  (см. рис. 4.24, *б*) совпадал по направлению с первым добавочным минимумом линии  $\lambda$  ( $k' = mN + 1$ ). Тогда с помощью условий (4.41) и (4.42) получаем:

$$d \sin \varphi_m = m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$

откуда следует, что

$$R = mN. \quad (4.46)$$

Итак, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна порядку спектра  $m$  и числу щелей  $N$ .

#### 4.2.4. Поляризация

##### *Естественный и поляризованный свет*

В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга (рис. 4.25). Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называется *поляризованным*. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, свет называют *плоско- или линейно-поляризованным*. Плоскость, проходящая через световой вектор и луч, называется *плоскостью поляризации линейно-поляризованной волны*.

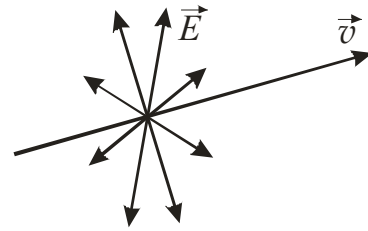


Рис. 4.25

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых *поляризаторами*. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, называемой *плоскостью поляризатора*, и полностью задерживают колебания, перпендикулярные к этой плоскости. Колебание с амплитудой  $A$ , совершающееся в плоскости, образующей угол  $\varphi$  с плоскостью поляризатора, можно разложить на два колебания с амплитудами  $A_{\parallel} = A \cos \varphi$  и  $A_{\perp} = A \sin \varphi$  (рис. 4.26; луч перпендикулярен к плоскости рисунка).

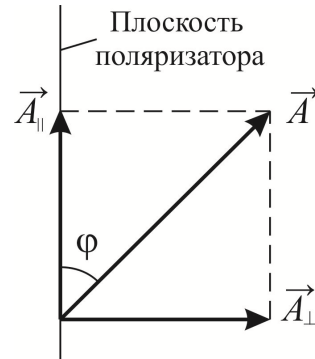


Рис. 4.26

Первое колебание проходит через прибор, второе – задерживается. Интенсивность прошедшей волны пропорциональна  $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$ , т.е. равна  $J \cos^2 \varphi$ , где  $J$  – интенсивность колебания с амплитудой  $A$ . Следовательно, колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет с собой долю интенсивности, равную  $\cos^2 \varphi$ .

В естественном свете все значения  $\varphi$  равновероятны. Поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, равна среднему значению  $\cos^2\varphi$ , т.е.  $1/2$ . При вращении поляризатора вокруг направления естественного луча интенсивность прошедшего света остается одной и той же, изменяется лишь плоскость поляризации света, выходящего из прибора.

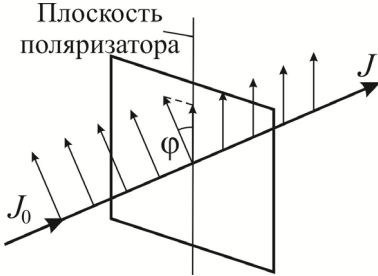


Рис. 4.27

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитудой  $A_0$  и интенсивностью  $J_0$  (рис. 4.27). Сквозь прибор пройдет составляющая колебаний с амплитудой  $A_0 \cos\varphi$ , где  $\varphi$  – угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора.

Следовательно, интенсивность прошедшего света определяется выражением

$$J = J_0 \cos^2\varphi. \quad (4.47)$$

Соотношение (4.47) называется законом Малюса.

Поставим на пути естественного луча два поляризатора, плоскости которых образуют угол  $\varphi$ . Из первого поляризатора выходит плоскополяризованный свет, интенсивность которого  $J_0$  составляет половину интенсивности естественного света  $J_{\text{ест}}$ . Согласно закону Малюса из второго поляризатора выходит свет интенсивностью  $J_0 \cos^2\varphi$ . Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора,

$$J = \frac{1}{2} J_{\text{ест}} \cos^2\varphi.$$

Максимальная интенсивность, равная  $\frac{1}{2} J_{\text{ест}}$ , получается при  $\varphi = 0$  (поляризаторы параллельны). При  $\varphi = \pi/2$  интенсивность равна нулю – скрещенные поляризаторы света не пропускают.

Свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений, называется *частично поляризованным*. Такой свет можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного. Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света изменяется



в пределах от  $J_{\max}$  до  $J_{\min}$ , причем переход от одного из этих значений к другому совершается при повороте на угол  $\varphi = \pi/2$  (за один полный поворот достигается два раза максимальное и два раза минимальное значения интенсивности). Частично поляризованный свет характеризуется *степенью поляризации*  $P$ :

$$P = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}}. \quad (4.48)$$

Для плоскополяризованного света  $J_{\min} = 0$  и  $P = 1$ ; для естественного света  $J_{\max} = J_{\min}$  и  $P = 0$ .

### ***Поляризация при отражении и преломлении***

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) не равен нулю, отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В от-

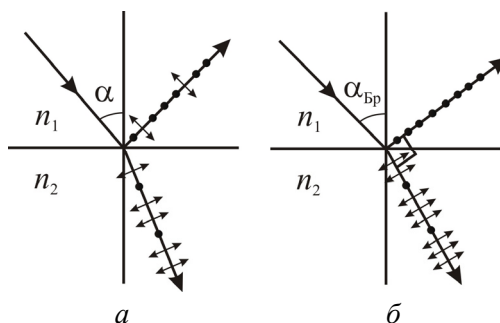


Рис. 4.28

раженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 4.28 эти колебания обозначены точками), в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (на рисунке они изображены двусторонними стрелками).

Степень поляризации зависит от угла падения. При угле падения, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} = n_{21}, \quad (4.49)$$

где  $n_{21}$  – показатель преломления второй среды относительно первой, отраженный луч полностью поляризован, т.е. он содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения (см. рис. 4.28, б). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном  $\alpha_{\text{Бр}}$ , достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично.

Соотношение (4.49) называется *законом Брюстера*. Угол  $\alpha_{\text{Бр}}$  называется *углом Брюстера*. Можно показать, что при падении све-

та под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

### Поляризация света при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы, за исключением принадлежащих к кубической системе, наблюдается явление, заключающееся в том, что падающий на кристалл луч разделяется на два луча, распространяющиеся, вообще говоря, с разными скоростями и в различных направлениях. Это явление, получившее название *двойного лучепреломления*, впервые наблюдалось в 1669 г. Э. Бартолином для исландского шпата.

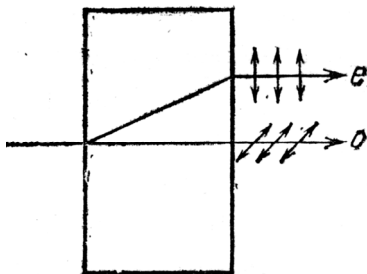


Рис. 4.29

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных лучей подчиняется закону преломления, в частности он лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Этот луч называется обыкновенным и обозначается буквой *o*. Для другого луча, называемого необыкновенным (его обозначают буквой *e*), отношение синусов угла падения и угла преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч отклоняется от нормали (рис. 4.29). Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Примерами одноосных кристаллов являются исландский шпат, кварц и турмалин (минерал сложного состава). У двуосных кристаллов (слюда, гипс) оба луча необыкновенные – показатели преломления у них зависят от направления в кристалле. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только одноосных кристаллов.

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются с одинаковой скоростью, не разделяясь. Это направление называется *оптической осью* кристалла. Следует иметь в виду, что оптическая ось – это не прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным сечением* или *главной плоскостью* кристалла. Обычно главное сечение выбирают проходящим через световой луч.

Исследование обыкновенного и необыкновенного лучей показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 4.29). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением. По выходе из кристалла оба луча отличаются друг от друга только направлением поляризации, так что названия лучей «обыкновенный» и «необыкновенный» имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется дихроизмом. Очень сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина. В нем обыкновенный луч практически полностью поглощается на длине 1 мм. В кристаллах сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на пути примерно в 0,1 мм. Это обстоятельство использовано для изготовления поляризационного устройства, называемого поляроидом. Оно представляет собой целлулоидную пленку, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристалликов сульфата йодистого хинина.

На явлении двойного лучепреломления основано действие поляризационного устройства, называемого *призмой Николя* (или просто *николем*). Оно представляет собой призму из исландского шпата (рис. 4.30),

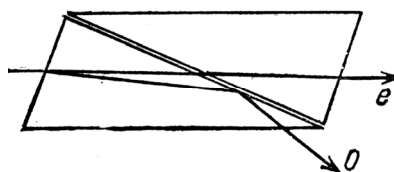


Рис. 4.30

разрезанную по диагонали и склеенную канадским бальзамом. Показатель преломления  $n$  канадского бальзама лежит между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в исландском шпате ( $n_o > n > n_e$ ). Угол падения подбирается таким, чтобы обыкновенный луч претерпевал на прослойке бальзама полное внутреннее отражение и отклонялся в сторону, необыкновенный же луч свободно проходил через эту прослойку и выходил из призмы.

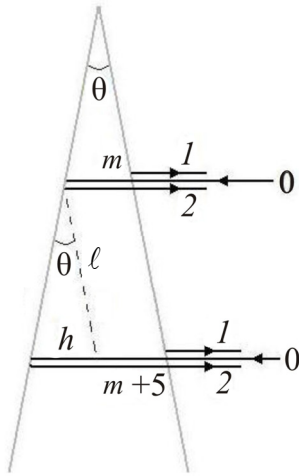
Некоторые вещества обладают способностью вращать плоскость поляризации проходящего через них плоскополяризованного света. Такие вещества называются *оптически активными*. К числу таких веществ принадлежат кристаллы (кварц, киноварь), чистые

жидкости (скипидар, никотин) и растворы (водные растворы сахара и винной кислоты).

Для кристаллов и чистых жидкостей угол поворота  $\varphi = \alpha \ell$ , где  $\alpha$  – постоянная вращения, град/м;  $\ell$  – длина пройденного в кристалле пути, м.

Для растворов  $\varphi = \varphi_0 c \ell$ , где  $c$  – объемно-массовая концентрация оптически активного вещества в растворе, кг/м<sup>3</sup>;  $\varphi_0$  – удельная постоянная вращения, град·м<sup>2</sup>/кг.

### Примеры решения задач



**№ 1.** Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Наблюдая интерференционные полосы в отраженном свете ( $\lambda = 546,1$  нм), находим, что расстояние между пятью полосами равно 2 см. Найдите угол клина. Свет падает перпендикулярно поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды 1,33.

Д а н о:  $\lambda = 546,1$  нм;  $\ell = 2 \cdot 10^{-2}$  м;  $n = 1,33$ .

Р е ш е н и е. На рисунке показан ход интерферирующих лучей 1 и 2 для  $m$ -й и  $(m + 5)$ -й интерференционных полос. В силу малости угла клина  $\theta$  явлениями преломления пренебрегаем.

Условия максимума интерферирующих лучей 1 и 2 для  $m$ -й и  $(m + 5)$ -й полос определяются выражениями:

$$2nd_m + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad 2nd_{m+5} + \frac{\lambda}{2} = (m + 5)\lambda,$$

где  $d_m$  и  $d_{m+5}$  – толщины пленки в местах  $m$ -й и  $(m + 5)$ -й полос;  $m$  – целое число.

Определяем толщины пленки и разность между ними:

$$d_m = \frac{m\lambda - \lambda/2}{2n} = \frac{(2m - 1)\lambda}{4n}; \quad d_{m+5} = \frac{(2m - 1)\lambda}{4n} + \frac{5\lambda}{2n}; \quad h = d_{m+5} - d_m = \frac{5\lambda}{2n}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{\ell} = \frac{5\lambda}{2n\ell} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{5\lambda}{2n\ell} =$$

$$= \arctg \frac{5 \cdot 546,1 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 1,33 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 2,939 \cdot 10^{-3} \text{ град} = 10,6''.$$

**№ 2.** Определите расстояние между мнимыми источниками в опытах с зеркалами Френеля, если расстояние между темными полосами на экране равно 3 мм, а расстояние от мнимых источников до экрана 2 м. Длина световой волны  $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ .

Д а н о:  $\Delta x = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $\ell = 2 \text{ м}$ ;  $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

Р е ш е н и е. Схема опыта с зеркалами Френеля представлена на рисунке. Здесь  $S_1$  и  $S_2$  – мнимые источники, которые получают путем отражения света от реального источника  $S$  в зеркалах. Ширина интерференционной полосы, т.е. расстояние между двумя соседними минимумами, определяется формулой (4.26):

$$\Delta x = \frac{\ell \lambda}{d}.$$

$$\text{Отсюда } d = \frac{\ell \lambda}{\Delta x} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 400 \text{ мкм}.$$

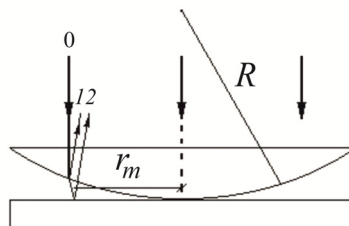
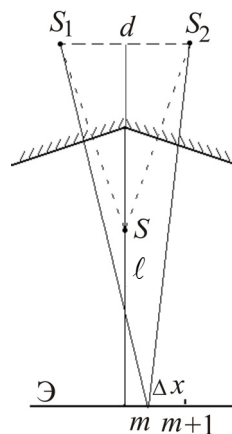
**№ 3.** Кольца Ньютона образуются между плоским стеклом и линзой с радиусом кривизны 8,6 м. Монохроматический свет падает нормально. Диаметр 4-го темного кольца равен 9 мм. Найдите длину волны света.

Д а н о:  $R = 8,6 \text{ м}$ ;  $d_m = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $m = 4$ .

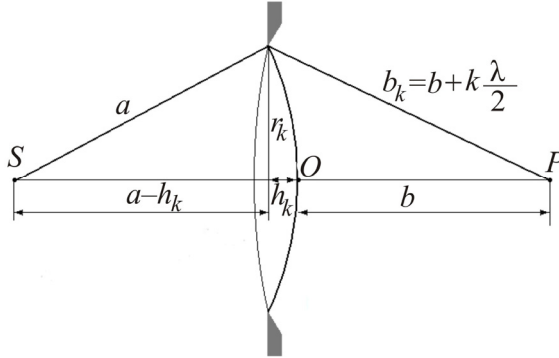
Р е ш е н и е. В отраженном свете в установке для наблюдения колец Ньютона интерферируют лучи 1 и 2, показанные на рисунке. Явлением преломления, безусловно влияющим на ход лучей 1 и 2, в силу малой толщины зазора пренебрегаем. Согласно формуле (4.32) радиус  $m$ -го темного кольца Ньютона  $r_m = \sqrt{R\lambda_0 m}$ . Поскольку

$$r_m = \frac{d_m}{2}, \text{ то } \frac{d_m^2 m}{4} = R\lambda_0 m. \text{ Отсюда}$$

$$\lambda_0 = \frac{d_m^2}{4Rm} = \frac{81 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 8,6 \cdot 4} = 0,589 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 589 \text{ нм}.$$



**№ 4.** Точечный источник света с длиной волны 0,5 мкм расположен перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом 1 мм. Расстояние от источника до точки  $O$  составляет 100 см. Найдите расстояние  $b$  от точки  $O$  до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии равно 3.



Дано:  $\lambda = 0,5$  мкм;  $a = 100$  см;  $r_k = 1$  мм;  $k = 3$ .

Решение. Получим формулу для радиуса  $k$ -й зоны Френеля.

По рисунку видно, что  $r_k^2 = a^2 - (a - h_k)^2 = \left(b + k \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_k)^2$ , где

$a$  – расстояние от источника до внешней границы отверстия (или радиус волновой поверхности);  $h_k$  – разность между радиусом волновой поверхности и расстоянием от источника до диафрагмы;  $r_k$  – радиус внешней границы  $k$ -й зоны. Раскрываем скобки:

$$r_k^2 = 2ah_k - h_k^2 = bk\lambda + k^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_k - h_k^2.$$

Слагаемое  $h_k^2$  сокращается, также пренебрежем слагаемым с  $\lambda^2$  в силу малости длины волны. Получим:

$$r_k^2 = 2ah_k = bk\lambda - 2bh_k.$$

Из второго равенства находим:

$$h_k = \frac{bk\lambda}{2(a+b)}.$$

Подставляя это выражение в первое равенство, получим формулу для радиуса внешней границы  $k$ -й зоны:

$$r_k = \sqrt{\frac{abk\lambda}{a+b}}.$$

Наконец, рассчитаем расстояние до точки наблюдения:

$$r_k^2 a + r_k^2 b = a b k \lambda \Rightarrow a b k \lambda - r_k^2 b = r_k^2 a \Rightarrow \\ \Rightarrow b = \frac{r_k^2 a}{a k \lambda - r_k^2} = \frac{10^{-6} \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} - 10^{-6}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ м.}$$

**№ 5.** Зеленый свет падает на щель шириной 8 мкм. Определите угол между 1-м и 2-м дифракционными максимумами.

Дано:  $\lambda = 500 \text{ нм}$ ;  $b = 8 \text{ мкм}$ .

Решение. Условие максимума при дифракции Фраунгофера на щели определяется формулой (4.39):

$$b \sin \varphi = \pm (m + 1/2)\lambda.$$

Для 1-го и 2-го максимума эта формула примет вид соответственно  $b \sin \varphi_1 = \frac{3\lambda}{2}$  и  $b \sin \varphi_2 = \frac{5\lambda}{2}$ . Тогда:

$$\sin \varphi_1 = 3\lambda/2b \text{ и } \sin \varphi_2 = 5\lambda/2b.$$

Отсюда:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{3\lambda}{2b} = \arcsin \frac{3 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 5,38^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{5\lambda}{2b} = \arcsin \frac{5 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 8,99^\circ;$$

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 3,61^\circ.$$

**№ 6.** При нормальном падении света на дифракционную решетку максимум 2-го порядка для  $\lambda_1 = 0,65 \text{ мкм}$  наблюдается под углом  $45^\circ$ . Найдите угол дифракции для  $\lambda_2 = 0,5 \text{ мкм}$  в 3-м порядке.

Дано:  $m_1 = 2$ ;  $\lambda_1 = 0,65 \text{ мкм}$ ;  $\varphi_1 = 45^\circ$ ;  $m_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,5 \text{ мкм}$ .

Решение. Условие максимума дифракционной решетки определяется формулой  $d \sin \varphi_m = m\lambda$ , где  $d$  – период (постоянная) дифракционной решетки;  $\varphi_m$  – угол дифракции.

Для  $m_1 = 2$  и  $\lambda_1$  имеем:

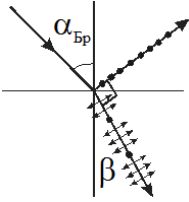
$$d \sin \varphi_1 = 2\lambda_1 \Rightarrow d = \frac{2\lambda_1}{\sin \varphi_1}.$$

Для  $m_2 = 3$  и  $\lambda_2$  имеем:

$$d \sin \varphi_2 = 3\lambda_2 \Rightarrow \sin \varphi_2 = \frac{3\lambda_2}{d} = \frac{3\lambda_2}{2\lambda_1} \sin \varphi_1 = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,8159,$$

$$\varphi_2 = \arcsin 0,8159 = 54,7^\circ.$$

**№ 7.** Чему равен показатель преломления стекла, если при отражении света от него отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления  $30^\circ$ ?



Д а н о:  $\beta = 30^\circ$ .

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи, если отраженный свет полностью поляризован, то угол падения равен углу Брюстера и выполняется закон Брюстера:  $\text{tg}\alpha_{\text{Бр}} = n$ .

Из закона преломления  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \Rightarrow \sin \alpha = n \sin \beta$ , тогда

$$\text{tg}\alpha_{\text{Бр}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{n \sin \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} = n.$$

$$\text{Далее } \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \beta}{1 - n^2 \sin^2 \beta} = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - n^2 \sin^2 \beta.$$

Отсюда:

$$n^2 = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \text{ctg}^2 \beta,$$

$$n = \text{ctg} \beta = \text{ctg} 30^\circ = 1,73.$$

**№ 8.** Никотин (чистая жидкость), содержащийся в стеклянной трубке длиной 8 см, поворачивает плоскость поляризации желтого света натрия на угол  $\varphi = 136,6^\circ$ . Плотность никотина  $\rho = 1,01 \text{ г/см}^3$ . Определите удельное вращение  $\varphi_0$  никотина.

Д а н о:  $\ell = 0,08 \text{ м}$ ;  $\varphi = 136,6^\circ$ ;  $\rho = 1,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Р е ш е н и е. Угол поворота находится по формуле

$$\varphi = \varphi_0 \rho \ell.$$

Отсюда удельное вращение никотина

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{\rho \ell} = \frac{136,6}{1010 \cdot 0,08} = 1,69 \frac{\text{град} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}}.$$

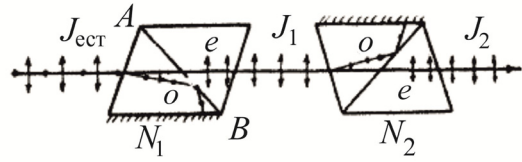
**№ 9.** Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен  $60^\circ$ . Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность  $J_{\text{ест}}$  естественного света: 1) при прохождении через один николя; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе  $k = 0,05$ . Потери на отражение света не учитывать.



Д а н о:  $\varphi = 60^\circ$ ;  $k = 0,05$ .

Р е ш е н и е.

1. Естественный свет, падая на грань призмы Николя, расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два луча:



обыкновенный и необыкновенный. Оба луча одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного луча лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный луч  $o$  вследствие полного внутреннего отражения от границы  $AB$  отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч  $e$  проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения:  $J_1 = \frac{1}{2} J_{\text{ест}} (1 - k)$ .

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность  $J_{\text{ест}}$  естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность  $J_1$  поляризованного света:

$$\frac{J_{\text{ест}}}{J_1} = \frac{J_{\text{ест}}}{\frac{1}{2} J_{\text{ест}} (1 - k)} = \frac{2}{1 - k}.$$

Отсюда  $\frac{J_{\text{ест}}}{J_1} = \frac{2}{1 - 0,05} = 2,1$ .

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный луч света интенсивностью  $J_1$  падает на второй николю  $N_2$  и также расщепляется на два луча различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный луч полностью поглощается призмой, поэтому интенсивность его нас не интересует. Интенсивность необыкновенного луча  $J_2$ , вышедшего из призмы  $N_2$ , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):  $J_2 = J_1 \cos^2 \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью пропускания николя  $N_2$ .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получим:  $J_2 = J_1 (1 - k) \cos^2 \varphi$ .

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность  $J_{\text{ест}}$  естественного света на интенсивность  $J_2$  света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{J_{\text{ест}}}{J_2} = \frac{J_{\text{ест}}}{J_1(1-k) \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Заменяя отношение  $J_{\text{ест}}/J_1$  его выражением, полученным в первом решении, получим:

$$\frac{J_{\text{ест}}}{J_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{J_{\text{ест}}}{J_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2 \cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

### 4.3. Основы квантовой оптики

#### 4.3.1. Тепловое излучение

##### *Характеристики теплового излучения*

Известно, что тела, нагретые до высоких температур, светятся. Поэтому *тепловым излучением* можно назвать свечение, обусловленное степенью нагретости тел. Более строго *тепловым излучением* называется *испускание электромагнитных волн за счет их внутренней энергии*, т.е. за счет теплового движения атомов и молекул. Все остальные виды свечения (возбуждаемые за счет любого вида энергии, кроме внутренней) объединяются под названием *люминесценция*.

Тепловое излучение свойственно всем телам при температуре выше 0 К и имеет сплошной спектр частот, положение максимума которого зависит от температуры.

При высоких температурах излучаются короткие (видимые и ультрафиолетовые) электромагнитные волны, при низких – преимущественно длинные (инфракрасные).

Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, состояние системы те-

ло – излучение *равновесное*. Тепловое излучение – единственный вид излучения, который может быть равновесным. Все другие виды излучений *неравновесные*.

Рассмотрим основные характеристики теплового излучения.

*Поток излучения*  $\Phi_T$  – физическая величина, равная количеству энергии, излучаемой нагретым телом (со всей поверхности) в единицу времени (мощность излучения тела):

$$\Phi_T = \frac{dW^{\text{излуч}}}{dt}, \quad [\Phi_T] = \text{Вт}. \quad (4.50)$$

*Энергетическая светимость* тела  $R_T$  – мощность излучения с единицы площади поверхности нагретого тела (во всем интервале частот или длин волн):

$$R_T = \frac{d\Phi_T}{dS} = \frac{d^2W^{\text{излуч}}}{dSdt}, \quad [R_T] = \text{Вт/м}^2. \quad (4.51)$$

Поток излучения и энергетическая светимость являются функциями температуры (чтобы подчеркнуть это, их и снабдили индексом  $T$ ).

Излучение нагретого тела при данной температуре  $T$  состоит из волн различных частот (длин волн), причем энергия в спектре распределена *неравномерно*.

*Испускательная способность* (прежнее название – *спектральная плотность энергетической светимости*) – мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины  $R_{\nu,T}$  (длин волн единичной ширины  $R_{\lambda,T}$ ):

$$R_{\nu,T} = \frac{dR_{T,[\nu,\nu+d\nu]}}{d\nu}, \quad [R_{\nu,T}] = \text{Дж/м}^2, \quad (4.52)$$

$$R_{\lambda,T} = \frac{dR_{T,[\lambda,\lambda+d\lambda]}}{d\lambda}, \quad [R_{\lambda,T}] = \text{Вт/м}^3. \quad (4.53)$$

Таким образом, энергетическую светимость, называемую в этом случае интегральной, можно найти следующим образом:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} R_{\lambda,T} d\lambda. \quad (4.54)$$

Длина волны и частота связаны соотношением  $\lambda = c/\nu$ . Взяв дифференциал, получаем:  $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$ . Знак «минус» означает, что

с увеличением одной величины другая убывает. Поскольку нас интересуют длины интервалов, знак «минус» можно опустить.

Итак, интервалу длин волн  $d\lambda$  в окрестности длины волны  $\lambda$  соответствует интервал частот  $dv$  в окрестности частоты  $\nu$ :

$$d\lambda = \frac{c}{\nu^2} d\nu = \frac{\lambda^2}{c} d\nu. \quad (4.55)$$

Если интервалы  $d\nu$  и  $d\lambda$ , входящие в выражения (4.52) и (4.53), связаны соотношением (4.55), т.е. относятся к одному и тому же участку спектра, то величины  $dR_{T,[\nu,\nu+d\nu]}$  и  $dR_{T,[\lambda,\lambda+d\lambda]}$  должны совпадать:

$$R_{\nu,T} d\nu = R_{\lambda,T} d\lambda. \quad (4.56)$$

Из соотношений (4.55) и (4.56) получаем связь испускательных способностей:

$$R_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{c} \quad \text{или} \quad R_{\lambda,T} = R_{\nu,T} \frac{\nu^2}{c}. \quad (4.57)$$

Способность тел поглощать падающее на него излучение характеризуется *поглощательной способностью* тела  $A_{\nu,T}$ , которая определяется долей потока излучения, поглощенного телом в интервале частот единичной ширины:

$$A_{\nu,T} = \frac{d\Phi_{T,[\nu,\nu+d\nu]}^{\text{полн}}}{d\Phi_{T,[\nu,\nu+d\nu]}}. \quad (4.58)$$

Тело, способное поглощать все падающее на него излучение, называется *абсолютно черным*, для него:  $A_{\nu,T}^{\text{ч}} \equiv 1$ . В природе не существует абсолютно черных тел, но можно найти тела, очень близкие по своим свойствам к абсолютно черным телам (сажа, черный бархат). Наиболее совершенной моделью абсолютно черного тела служит небольшое отверстие в непрозрачной стенке замкнутой плоскости.

Тело, полностью отражающее падающее на него излучение всех длин волн, называется *абсолютно белым*. Тело, для которого поглощательная способность одинакова для всех частот и зависит только от температуры, называют *серым*:  $A_{\nu,T}^{\text{с}} = A_T = \text{const} < 1$ .

## Законы теплового излучения

Между испускательной и поглощательной способностями любого тела имеется связь, которая выражается соотношением

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (4.59)$$

Соотношение (4.59) называется законом Кирхгофа: *отношение испускательной способности любого тела к его поглощательной способности при тех же условиях не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры*. Функция  $r_{\nu,T}$  называется *универсальной функцией Кирхгофа*, которая, по сути, характеризует испускательную способность абсолютно черного тела (так как  $A_{\nu,T}^a \equiv 1$ ).

Из закона Кирхгофа следует, что чем больше тело поглощает, тем больше оно и излучает энергии (при одинаковых частоте и температуре). Кроме того, если тело не поглощает электромагнитные волны какой-то частоты, то оно их и не излучает.

Интегральную энергетическую светимость в этом случае можно представить следующим образом:

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu. \quad (4.60)$$

Для серого тела

$$R_T^c = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad (4.61)$$

где  $R_e$  – *энергетическая светимость черного тела*, которая зависит только от температуры,

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu. \quad (4.62)$$

Из закона Кирхгофа следует, что основной задачей при описании теплового излучения являлось нахождение зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от температуры и частоты (длины волны), так как она универсальна для всех тел.

Зависимость энергетической светимости черного тела от температуры была получена Д. Стефаном (1879) из анализа экспериментальных данных, а затем Л. Больцманом (1884) – теоретическим

путем. Эти ученые установили, что энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна его абсолютной температуре в четвертой степени:

$$R_e = \sigma T^4, \quad (4.63)$$

где  $\sigma$  – *постоянная Стефана – Больцмана*,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>). Формула (4.63) называется *законом Стефана – Больцмана*.

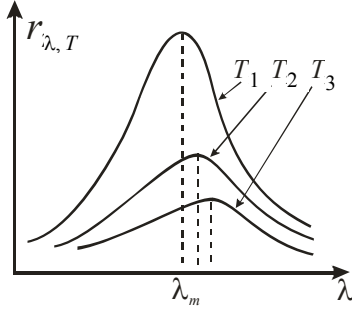


Рис. 4.31

Закон Стефана – Больцмана не несет информации о спектральном составе излучения черного тела. Из экспериментальных кривых зависимости  $r_{\nu, T}$  ( $r_{\lambda, T}$ ) от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ) при различных температурах (рис. 4.31) следует, что распределение энергии в спектре черного тела является неравномерным. Все кривые имеют ярко выраженный максимум, который при увеличении температуры смещается в сторону более коротких волн.

Зависимость длины волны  $\lambda_m$ , соответствующей максимуму функции  $r_{\lambda, T}$ , от температуры, была установлена немецким физиком В. Вином (1893) и получила название *закона смещения Вина*:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (4.64)$$

где  $b$  – *постоянная Вина*,  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К.

Закон смещения Вина, таким образом, устанавливает: *длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре этого тела.*

Этот закон объясняет, почему доля энергии, приходящейся на видимые лучи, возрастает, и свечение тела при нагревании переходит от красного к белому калению.

Попытки получить теоретически вид функции  $r_{\nu, T}$  ( $r_{\lambda, T}$ ) (формула Рэля – Джинса, закон излучения Вина) на основе представлений классической физики не увенчались успехом.

Правильное (согласующееся с опытными данными) выражение для испускательной способности черного тела было найдено в 1900 г. немецким физиком М. Планком. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики,

согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, т. е. принимать любые, сколь угодно близкие значения.

*Гипотеза Планка:* атомы тела излучают энергию не непрерывно в виде волн, а отдельными порциями – *квантами*, причем энергия  $\varepsilon$  одного кванта пропорциональна его частоте  $\nu$ :

$$\varepsilon = h\nu, \quad (4.65)$$

где  $h$  – константа, получившая название *постоянной Планка*,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Исходя из этого предположения, М. Планк получил распределение для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (4.66)$$

где  $c$  – скорость света;  $k$  – постоянная Больцмана.

Выражение (4.66) получило название *формулы Планка*. Учитывая (4.57), а также выразив частоту через длину волны  $\nu = c/\lambda$ , формулу Планка можно представить в виде:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (4.67)$$

Из формулы Планка можно получить все законы теплового излучения, в частности (4.63) и (4.64).

Формула Планка – полное решение основной задачи теплового излучения, поставленной Кирхгофом. Она блестяще согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектре излучения черного тела во всем интервале частот и температур. Теоретический вывод этой формулы М. Планк изложил в 1900 г. на заседании немецкого физического общества. Этот день знаменовал рождение квантовой физики.

### 4.3.2. Фотоэффект

#### *Виды фотоэлектрического эффекта*

Гипотеза Планка, блестяще решившая задачу излучения абсолютно черного тела, получила дальнейшее развитие при объяснении фотоэффекта. Это явление было открыто в 1887 г. Г. Герцем, который, облучая ультрафиолетовыми лучами находящиеся под на-

пряжением электроды, наблюдал ускорение процесса разряда. Позднее было установлено, что причиной данного явления стало появление при облучении свободных электронов.

*Внешний фотоэлектрический эффект (фотоэффект)* – явление испускания электронов веществом под действием света.

В 1888–1890 гг. А.Г. Столетов провел систематическое исследование внешнего фотоэффекта и установил следующие его закономерности:

– наиболее эффективное действие оказывают ультрафиолетовые лучи;

– под действием света вещество теряет только отрицательные заряды;

– сила тока, возникающего под действием света (фототока), пропорциональна освещенности вещества.

*Внутренний фотоэффект* – это явление увеличения электропроводности полупроводников и диэлектриков под действием света. На этом явлении основано действие *фотосопротивлений (фоторезисторов)*, сопротивление которых падает с увеличением освещенности.

Под действием света электроны могут совершать переходы внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению *фотопроводимости* (повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению ЭДС.

*Вентильный фотоэффект* – разновидность внутреннего фотоэффекта – возникновение ЭДС (фотоЭДС) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект открывает пути для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую (*солнечные батареи*).

### ***Законы внешнего фотоэффекта***

Принципиальная схема для исследования фотоэффекта приведена на рис. 4.32. Два электрода в вакуумной трубке (*вакуумный фотоэлемент*) подключены к батарее Б так, что с помощью потенциометра R можно изменять подаваемое на электроды напряжение.



Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошечко, пропускающее ультрафиолет), измеряется включенным в цепь гальванометром  $G$ . Данная установка позволяет получить *вольт-амперные характеристики* фотоэффекта – зависимости фототока  $I$ , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения  $U$  между электродами при различных световых потоках и частоте света  $\nu$ .

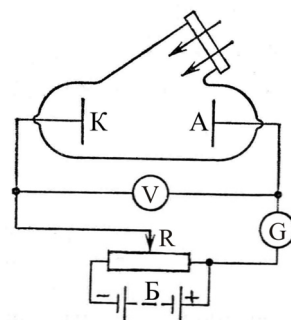


Рис. 4.32

Вольт-амперные характеристики вакуумного фотоэлемента при освещении монохроматическим светом приведены на рис. 4.33 для двух значений светового потока ( $\Phi_1 > \Phi_2$ ). Видно, что при неизменной освещенности фототок растет с увеличением напряжения и при некотором значении напряжения достигает насыщения, когда все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. Следовательно, сила тока насыщения  $I_n$  определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света. С увеличением освещенности увеличивается и значение тока насыщения.

При  $U = 0$  фототок не исчезает, следовательно, электроны, выбитые из катода под действием света, обладают некоторой начальной скоростью (и энергией) и могут достигать анода без внешнего поля.

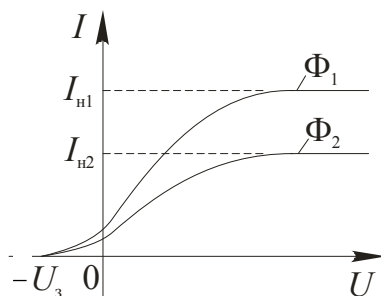


Рис. 4.33

Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить некоторое отрицательное (*задерживающее*) напряжение  $-U_3$ . При таком напряжении ни одному из электронов, даже обладающему при вылете из катода наибольшей скоростью  $v_{\max}$ , не удастся преодолеть задерживающее поле и достигнуть анода. Поэтому можно написать:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (4.68)$$

где  $m$  – масса электрона.

Таким образом, измерив задерживающее напряжение  $U_3$ , можно определить максимальное значение скорости и кинетической энергии фотоэлектронов.

На основании обобщения полученных экспериментальных данных были сформулированы законы фотоэффекта:

1. *Закон Столетова*: при фиксированной частоте падающего света ( $\nu = \text{const}$ ) число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (световому потоку  $\Phi$ ).

2. Максимальная кинетическая энергия  $W_{\text{кmax}}$  (максимальная начальная скорость  $v_{\text{max}}$ ) вырванных светом электронов не зависит от интенсивности падающего света (от светового потока), а определяется только его частотой.

3. Для каждого вещества существует так называемая *красная граница фотоэффекта*, т.е. такая минимальная частота  $\nu_{\text{min}}$  света, ниже которой фотоэффект невозможен.

Частота  $\nu_{\text{min}}$  зависит от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Иногда выделяют 4-й закон: внешний фотоэффект безынерционен, т.е. наступает практически сразу после начала освещения.

### **Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта**

С точки зрения волновой теории света объяснить законы фотоэффекта невозможно. Согласно этой теории электроны должны постепенно накапливать энергию, «раскачиваясь» в электрическом поле световой волны, и этот процесс должен зависеть от амплитуды световой волны (светового потока). Соответствующие расчеты показывают, что время «раскачки» должно составлять порядка нескольких минут. Этот вывод противоречит безынерционности фотоэффекта и независимости энергии вырванных электронов от светового потока. Кроме того, совершенно непонятно существование минимальной частоты света, необходимой для возникновения фотоэффекта, так как согласно волновой теории свет любой частоты, но достаточно большой интенсивности (пропорциональной световому потоку  $\Phi$ ) должен был бы вырывать электроны из металла.

В 1905 г. А. Эйнштейн, опираясь на работы М. Планка по излучению нагретых тел, предложил квантовую теорию фотоэффекта.

В основу этой теории положены следующие идеи:

1. Свет не только излучается, но и распространяется в пространстве и поглощается веществами в виде отдельных порций энергии – квантов энергии  $h\nu$ . Следовательно, распространение электромагнитного излучения нужно рассматривать не как непрерывный волновой процесс, а как поток локализованных в пространстве дискретных квантов, движущихся со скоростью распространения света в вакууме  $c$ . Эти кванты электромагнитного излучения были названы *фотонами*.

2. Процесс поглощения света веществом сводится к тому, что фотоны передают всю свою энергию электронам вещества, причем каждый квант поглощается только одним электроном.

Таким образом, процесс поглощения света происходит прерывно как в пространстве, так и во времени.

Эти идеи Эйнштейна легли в основу квантовой теории света, которая позволила успешно объяснить законы фотоэффекта и многие другие оптические явления, не укладывающиеся в рамки классической электромагнитной теории.

Основываясь на вышеизложенных идеях и применяя к фотоэффекту закон сохранения энергии, Эйнштейн предложил уравнение, которое устанавливает связь между энергией кванта  $h\nu$ , возбуждающего фотоэффект, работой  $A_{\text{вых}}$  (*работа выхода*), которая затрачивается на выход электрона из металла, и максимальной кинетической энергией  $mv_{\text{max}}^2 / 2$  вылетающего электрона.

Уравнение Эйнштейна имеет следующий вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}, \quad (4.69)$$

где  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода (наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум; зависит от природы и состояния поверхности металла).

Уравнение (4.69) объясняет все свойства и законы фотоэффекта. Безынерционность фотоэффекта объясняется тем, что передача энергии при столкновении фотона с электроном происходит почти мгновенно; каждый квант поглощается только одним электроном, поэтому число вырванных фотоэлектронов должно быть пропорционально числу поглощенных фотонов, т.е. световому потоку. Из уравнения (4.69) непосредственно следует, что максимальная

кинетическая энергия фотоэлектрона линейно возрастает с увеличением частоты падающего излучения и не зависит от величины светового потока (числа фотонов), так как ни работа выхода  $A_{\text{вых}}$ , ни частота излучения  $\nu$  от светового потока не зависят. Формула (4.69) показывает, что существует некоторая минимальная частота света  $\nu_{\text{min}}$ , необходимая для возникновения фотоэффекта, что соответствует равенству нулю кинетической энергии фотоэлектронов:

$$\nu_{\text{min}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}. \quad (4.70)$$

Эта минимальная частота света (максимальная длина волны), называемая красной границей, определяется только работой выхода электрона из металла, она зависит лишь от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Величина задерживающего напряжения определяется из условий (4.69) и (4.70):

$$U_3 = \frac{h\nu - A_{\text{вых}}}{e}. \quad (4.71)$$

Таким образом, величина задерживающего напряжения не зависит от светового потока, а зависит только от частоты падающего света.

### 4.3.3. Корпускулярно-волновой дуализм

#### *Дуализм свойств света. Фотоны*

Согласно квантовым гипотезам Планка и Эйнштейна свет испускается, распространяется и поглощается в виде квантов энергии – *фотонов*. Все оптические явления, которые могут быть поняты и объяснены на основе этой гипотезы, составляют предмет изучения *квантовой оптики*.

Итак, свет представляет собой сложное явление, сочетающее в себе свойства электромагнитной волны и потока частиц – фотонов. Такое сочетание называется *корпускулярно-волновым дуализмом*.

Как и любая другая частица материи, фотон обладает энергией и импульсом. Корпускулярные характеристики фотона – энергия  $\epsilon$  и импульс  $p_{\text{ф}}$  – оказываются связанными с волновыми – частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ .

Энергия фотона пропорциональна частоте электромагнитного излучения (обратно пропорциональна длине волны), частицей которого он является:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (4.72)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $c$  – скорость света.

Импульс фотона связан с его энергией соотношением:

$$p_{\phi} = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (4.73)$$

Такое соотношение между импульсом и энергией возможно только для частиц с нулевой массой, движущихся со скоростью света  $c$ .

Масса фотона равна нулю:

$$m_{\phi} = 0, \quad (4.74)$$

и фотон всегда движется со скоростью света:

$$v_{\phi} = c. \quad (4.75)$$

Такие необычные свойства означают, что фотон представляет собой частицу особого рода, отличную от таких частиц, как электрон, протон и т.п., которые могут существовать, двигаясь со скоростями, меньшими  $c$ , и даже покоясь.

Надо иметь в виду, что фотоны движутся со скоростью  $c$  не только в вакууме, но и в веществе. «Замедление» света в веществе обусловлено тем, что при прохождении через вещество фотоны поглощаются атомами и затем испускаются вновь. Между актами поглощения и испускания проходит некоторое время, вследствие чего средняя скорость фотонов в веществе оказывается меньше  $c$ .

Итак, свет (и любое другое электромагнитное излучение) обнаруживает удивительное единство, казалось бы, взаимно исключаящих свойств – непрерывности (волны) и дискретности (фотоны), которые взаимно дополняют друг друга. Действительно, такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация света убедительно подтверждают волновую (электромагнитную) природу света. С другой стороны, излучение абсолютно черного тела, фотоэффект и другие явления служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов. Причем

с уменьшением длины волны (увеличением частоты) все более отчетливо проявляются квантовые свойства света, а с увеличением длины волны (уменьшением частоты) основную роль играют его волновые свойства. Таким образом, если «перемещаться» по шкале электромагнитных волн в сторону более коротких волн (от радиоволн до  $\gamma$ -лучей), то волновые свойства электромагнитного излучения будут постепенно уступать место все более отчетливо проявляющимся квантовым свойствам.

В разд. 5.2 мы увидим, что корпускулярно-волновой дуализм присущ не только световым частицам, но и частицам вещества (электронам, протонам, атомам и т.д.).

### *Давление света*

Из наличия у фотона импульса вытекает, что свет, падающий на какое-либо тело, должен оказывать на это тело давление, равное импульсу, сообщаемому фотонами единице поверхности в единицу времени. Давление света на поверхность происходит в результате передачи импульса при поглощении и отражении света поверхностью.

Рассчитаем давление, оказываемое на плоскую поверхность падающим нормально монохроматическим световым потоком с частотой  $\nu$ .

Пусть в единицу времени на единицу площади тела падает  $N_{tS}$  фотонов. При коэффициенте отражения  $\rho$  (коэффициент отражения равен отношению энергии отраженной к энергии падающей) света от поверхности тела  $\rho N_{tS}$  фотонов отразится, а  $(1-\rho)N_{tS}$  – поглотится. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс  $h\nu/c$ , а каждый отраженный передает двойной импульс  $2h\nu/c$ . Тогда давление света  $p$  на поверхность (как изменение импульса в единицу времени) будет следующим:

$$p = \frac{2h\nu}{c} \rho N_{tS} + \frac{h\nu}{c} (1-\rho) N_{tS} = (1+\rho) \frac{h\nu}{c} N_{tS}.$$

Здесь энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени,  $h\nu N_{tS}$  есть плотность потока световой энергии  $W_{tS}$ . С учетом этого для давления, производимого светом при нормальном падении на поверхность, получаем:

$$p = \frac{W_{tS}}{c} (1+\rho).$$

Заметим, что  $W_{IS}/c = w$  – объемная плотность энергии излучения. Тогда для давления света окончательно получаем:

$$p = w(1 + \rho), \quad (4.76)$$

что согласуется с выражением (3.195) для давления, получающимся из электромагнитной теории.

Световое давление ничтожно мало. Так, прямые солнечные лучи в яркий день оказывают при полном поглощении давление  $4 \cdot 10^{-7}$  Н/м<sup>2</sup>. Благодаря столь малой величине заметить световое давление трудно. Впервые экспериментально световое давление на твердые тела было обнаружено и измерено русским физиком П.Н. Лебедевым в 1901 г.

### Примеры решения задач

**№ 1.** Мощность излучения абсолютно черного тела  $\Phi_T = 10^5$  Вт. Чему равна площадь излучающей поверхности тела, если длина волны, на которую приходится максимум излучения, равна  $7 \cdot 10^{-7}$  м?

Д а н о:  $\Phi_T = 10^5$  Вт;  $\lambda_m = 7 \cdot 10^{-7}$  м.

Р е ш е н и е. Для абсолютно черного тела справедливы закон Стефана – Больцмана и закон смещения Вина:

$$R_e = \sigma T^4; \quad \lambda_m = \frac{b}{T},$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $b$  – постоянная Вина,  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К.

Из последнего равенства выражаем температуру абсолютно черного тела:  $T = \frac{b}{\lambda_m}$ .

Энергетическая светимость абсолютно черного тела по определению

$$R_e = \frac{W_{\text{излуч}}}{S \cdot t} = \frac{\Phi_T}{S}.$$

Подставляем значения  $R_e$  и  $T$  в закон Стефана – Больцмана:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_T}{S} &= \sigma \frac{b^4}{\lambda_m^4} \Rightarrow S = \frac{\Phi_T \cdot \lambda_m^4}{\sigma \cdot b^4} = \\ &= \frac{10^5 \cdot 2401 \cdot 10^{-28}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 70,73 \cdot 10^{-12}} = 5,99 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 60 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

**№ 2.** Определите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка ( $A_{\text{вых}} = 4,0$  эВ) светом с длиной волны  $0,25$  мкм. Чему равна красная граница фотоэффекта?

Д а н о:  $A_{\text{вых}} = 4,0$  эВ;  $\lambda = 0,25 \cdot 10^{-6}$  м.

Р е ш е н и е. Используем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2},$$

где  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ;  $c$  – скорость света,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода,

$A_{\text{вых}} = 4,0$  эВ  $= 4,0 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,4 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $m_e$  – масса электрона.

Найдем максимальную скорость вылетающего электрона:

$$\frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \left( \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \right)}{m_e}},$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \left( \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,25 \cdot 10^{-6}} - 6,4 \cdot 10^{-19} \right)}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{2(7,96 - 6,4) \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}},$$

$$v_{\text{max}} = 0,586 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Для красной границы фотоэффекта имеем:

$$h\nu_{\text{min}} = A_{\text{вых}} \Rightarrow \nu_{\text{min}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h} = \frac{6,4 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 0,965 \cdot 10^{15} \text{ Гц;}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{\nu_{\text{min}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,965 \cdot 10^{15}} = 3,11 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 311 \text{ нм.}$$

**№ 3.** Плотность потока световой энергии на поверхность  $7$  кВт/м<sup>2</sup>. Найдите световое давление для случаев, когда поверхность: а) полностью отражает все лучи; б) полностью поглощает все падающие лучи.

Д а н о:  $W_{\text{IS}} = 7 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>.

Р е ш е н и е. Плотность потока световой энергии  $W_{\text{IS}}$  – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени. Объемная плотность энергии  $w = \frac{W_{\text{IS}}}{c}$ .



По формуле  $p = w(1 + \rho)$  находим световое давление:

а) для полностью отражающей поверхности коэффициент отражения  $\rho = 1$ , тогда

$$p = 2w = \frac{2W_{тS}}{c} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 4,67 \cdot 10^{-5} \text{ Па};$$

б) для полностью поглощающей поверхности  $\rho = 0$ , тогда

$$p = w = \frac{W_{тS}}{c} = \frac{7 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 2,33 \cdot 10^{-5} \text{ Па}.$$

## 5. ОСНОВЫ АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

### 5.1. Строение атома

Еще в античные времена возникло представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества («атомос» – неразложимый). К началу XVIII в. существование атомов было доказано, но атомы по-прежнему считались неделимыми. В 1869 г. Д.И. Менделеев разработал *Периодическую систему элементов*, отражающую единую природу атомов. Напрашивался вывод о том, что атом имеет сложное строение. Когда было доказано, что электрон является составной частью любого атома, встал вопрос о строении атома. Результаты исследований свойств электрона и радиоактивности позволили строить конкретные модели атома.

#### 5.1.1. Закономерности в атомных спектрах

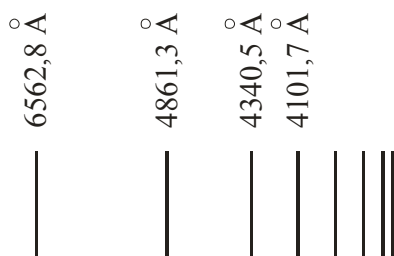


Рис. 5.1

Излучение не взаимодействующих друг с другом атомов состоит из отдельных спектральных линий. В соответствии с этим спектр испускания атомов называется *линейчатым*. На рис. 5.1 представлена часть спектра атомарного водорода в области видимого света с указанием соответствующих длин волн в *ангстремах* ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Спектры других элементов оказываются более сложными.

В отличие от линейчатых спектров атомов *молекулярные спектры* представляются состоящими из сплошных полос. Тем не менее при значительном увеличении обнаруживается, что полосы состоят из большого числа тесно расположенных линий, поэтому спектры молекул носят название *полосатых спектров*.

Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию строения атомов. Прежде всего было замечено, что линии в спектрах атомов расположены не беспорядочно, а объединяются в группы или, как их называют, *серии линий*. Отчетливее всего это обнаруживается в спектре простейшего атома – водорода. В рамках каждой серии линий расстояние между линиями закономерно убывает

по мере перехода от более длинных волн к более коротким (см. рис. 5.1).

Швейцарский ученый И. Бальмер (1885) подобрал эмпирическую формулу, описывающую все известные в то время спектральные линии атома водорода в *видимой области спектра*:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots),$$

где  $R$  – постоянная Ридберга,  $R = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Так как частота  $\nu = c/\lambda$ , то эта формула может быть представлена и для частот.

В дальнейшем были обнаружены серии линий в ультрафиолетовой и инфракрасной областях спектра. Все серии линий в спектре атома водорода могут быть описаны одной формулой, называемой *обобщенной формулой Бальмера*:

$$\nu = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (5.1)$$

где  $R'$  также называют постоянной Ридберга,  $R' = Rc = 3,293 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Целое число  $m$  определяет номер серии: при  $m = 1$  получается серия линий, расположенная в ультрафиолетовой части спектра, – *серия Лаймана*; при  $m = 2$  наблюдается *серия Бальмера*, расположенная в видимой части спектра; при  $m = 3$  – *серия Пашена* и т.д.;  $n$  принимает целочисленные значения начиная с  $(m + 1)$  и определяет отдельные линии в каждой серии.

## 5.1.2. Модели атома

### *Модели Томсона и Резерфорда*

Первая модель атома принадлежит Дж. Томсону (1903). Согласно этой модели атом представляет собой непрерывно заряженный положительным зарядом шар радиусом порядка  $10^{-10}$  м, внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны; отрицательный суммарный заряд электронов равен положительному заряду шара, поэтому атом в целом нейтрален.

Через несколько лет было доказано, что атом устроен иначе. Это открытие принадлежит английскому физика Э. Резерфорду. Он исследовал прохождение  $\alpha$ -частиц в веществе через золотую фольгу толщиной примерно 1 мкм ( $\alpha$ -частицы – положительно заряженные

частицы с зарядом  $+2e$  и массой примерно в 7300 раз большей массы электрона). Проходя через фольгу, основная часть этих частиц незначительно отклонилась (согласно предложенной Томсоном модели атома). Но совершенно неожиданно оказалось, что примерно одна частица из 20 000 возвращается назад в сторону источника. Легкие электроны не могут существенно изменить движение тяжелых и быстрых частиц. Значительное отклонение  $\alpha$ -частиц обусловлено тем, что они наталкиваются на тяжелую частицу с положительным зарядом. Объем этой тяжелой частицы очень мал по сравнению с объемом атома, так как сильно отклоняются лишь немногие  $\alpha$ -частицы. Чтобы объяснить результаты опытов, Резерфорд в 1911 г. предложил принципиально новую модель атома, напоминающую по строению Солнечную систему, – планетарную (ядерную) модель атома. Согласно этой модели положительно заряженная часть атома не распределена по всему его объему, а сосредоточена в чрезвычайно малом объеме – *ядре* атома (размер –  $10^{-15}$ – $10^{-14}$  м). Вокруг положительного ядра, имеющего заряд  $Ze$  ( $Z$  – порядковый номер элемента в системе Менделеева,  $e$  – элементарный заряд), по замкнутым орбитам движутся электроны, подобно планетам вокруг Солнца, образуя электронную оболочку атома. Поскольку атомы нейтральны, то заряд ядра равен суммарному заряду электронов, т.е. вокруг ядра должно вращаться  $Z$  электронов. В атоме действуют электрические (кулоновские) силы.

Электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом  $r$  (с центростремительным ускорением). Согласно классической электродинамике ускоренно движущийся электрон должен непрерывно излучать электромагнитные волны, терять энергию на излучение и упасть на ядро. Однако этого не происходит. Другая трудность состоит в следующем: если принять, что частота излучаемого электроном света равна частоте колебаний электрона в атоме (или числу оборотов в одну секунду), то излучаемый свет по мере приближения электрона к ядру должен непрерывно изменять свою частоту. Соответственно, спектр излучаемого света должен быть сплошным (в нем должны присутствовать все частоты). Но это противоречит опыту. Атом излучает волны вполне определенных частот, типичных для данного химического элемента, и характеризуется спектром, состоящим из отдельных спектральных линий – линейчатым спектром (см. рис. 5.1).

Таким образом, в рамках модели атома Резерфорда не могли быть объяснены устойчивость атома и линейчатые спектры его излучения. Противоречия модели Резерфорда оказалось возможным разрешить, лишь отказавшись от ряда привычных представлений классической физики.

### *Постулаты Бора*

Датский физик Нильс Бор в 1913 г. предпринял смелую попытку объяснить результаты анализа спектра атома водорода. Это была первая попытка построить качественно новую (квантовую) теорию атома.

Предположение Бора заключалось в том, что классическая электромагнитная теория просто неприменима к электрону, движущемуся вокруг ядра. Он предположил, что два члена в формуле Бальмера (5.1) представляют собой полные энергии электрона на двух «разрешенных» орбитах в атоме водорода. Если умножить обе части этой формулы на постоянную Планка  $h$  и ввести обозначения  $W_n = -hR' / n^2$ ,  $W_m = -hR' / m^2$ , имеющие размерность энергии, то можно написать:

$$h\nu = W_n - W_m.$$

Бор предположил, что энергия электрона не теряется на излучение, когда он движется по любой из разрешенных орбит. Электрон излучает энергию только тогда, когда он совершает переход между двумя разрешенными орбитами. Энергия испущенного фотона в точности равна разности энергий электрона на этих орбитах.

Чтобы доказать правильность этих предположений, Бор попытался вычислить энергии этих состояний. Оказалось, что можно получить ряд дискретных разрешенных значений энергии на орбитах только при том предположении, что момент импульса квантуется, т.е. может принимать ряд дискретных значений. В итоге в основу своей теории Бор положил два постулата.

*Первый постулат (постулат стационарных состояний):* существуют стационарные состояния атома, находясь в которых он не излучает энергию.

Этим стационарным состояниям соответствуют вполне определенные (стационарные) орбиты, по которым движутся электроны. При движении по стационарным орбитам электроны, несмотря на наличие

у них ускорения, не излучают электромагнитных волн. В этом утверждении заключается отказ от следствия из электродинамики, что ускоренно движущийся электрический заряд всегда излучает электромагнитные волны.

В стационарном состоянии атома электрон должен иметь дискретные (квантованные) значения момента импульса и энергии.

*Правило квантования круговых орбит* утверждает, что в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные (квантованные) значения момента импульса:

$$L_n = m_e v_n r_n = n \hbar, \quad (5.2)$$

где  $L_n$  – момент импульса на  $n$ -й орбите;  $m_e$  – масса электрона;  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  – радиус  $n$ -й орбиты электрона;  $\hbar = h/2\pi$ ;  $h$  – постоянные Планка;  $n$  – номер орбиты,  $n = 1, 2, 3, \dots$

*Второй постулат (правило частот)*: при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Энергия фотона равна разности энергий атома в двух его стационарных состояниях:

$$h \nu_{nm} = W_n - W_m, \quad (5.3)$$

где  $\nu_{nm}$  – частота излучения;  $W_n$  и  $W_m$  – энергии атома в рассматриваемых состояниях.

Существование дискретных энергетических уровней атома подтверждается опытами, осуществленными в 1914 г. Д. Франком и Г. Герцем.

### ***Боровская теория водородного атома***

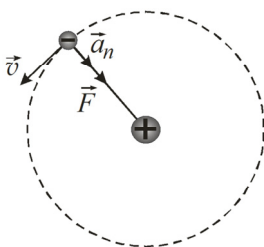


Рис. 5.2

В атоме водорода на электрон, движущийся со скоростью  $v_n$  по круговой орбите радиусом  $r_n$  (рис. 5.2), со стороны ядра (протона) действует сила Кулона (3.3), которая создает центростремительное (нормальное) ускорение  $\vec{a}_n$ . В соответствии со вторым законом Ньютона (1.50) можем записать:

$$m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}. \quad (5.4)$$

Решая совместно уравнения (5.2) и (5.4), получим выражение для радиуса  $n$ -й стационарной орбиты:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.5)$$

Для атома водорода радиус первой разрешенной орбиты электрона (при  $n = 1$ ), называемый *первым боровским радиусом*,

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0,528 \text{ \AA}.$$

Полная энергия электрона в атоме водорода складывается из его кинетической энергии ( $m_e v^2/2$ ) и потенциальной энергии в электростатическом поле ядра ( $-e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$ ). Из (5.4) следует, что  $m_e v_n^2 = e^2 / (4\pi\varepsilon_0 r_n)$ , поэтому можем записать:

$$W = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}. \quad (5.6)$$

Подставляя квантованные для радиуса  $n$ -й стационарной орбиты значения (5.5) в (5.6), получим, что энергия электрона может принимать только следующие дозволённые дискретные значения:

$$W_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.7)$$

Целое число  $n$  в выражении (5.7), определяющее энергетические уровни атома, называется *главным квантовым числом*. Энергетическое состояние с  $n = 1$  является *основным* (нормальным) состоянием:

$$W_1 = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} = -13,55 \text{ эВ}.$$

Состояния с  $n > 1$  являются *возбужденными*. Энергетический уровень, соответствующий основному состоянию атома, называется *основным* (нормальным) уровнем; все остальные уровни являются *возбужденными*. Отрицательность значений энергии электрона в атоме свидетельствует о том, что он находится в связанном состоянии, т.е. принадлежит данному атому. Энергия атома водорода

с увеличением  $n$  возрастает, а энергетические уровни сближаются. В пределе при  $n \rightarrow \infty$  энергия атома стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W = 0.$$

Нулевая энергия атома соответствует его *ионизации* (отрыву от него электрона). Таким образом, *энергия ионизации* атома водорода (энергия, которую необходимо сообщить атому для высвобождения электрона)

$$W_i = -W_1 = 13,55 \text{ эВ}.$$

Согласно второму постулату Бора (5.3) при переходе атома водорода из стационарного состояния  $n$  в стационарное состояние  $m$  (с меньшей энергией) испускается квант энергии:

$$h\nu = W_n - W_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

откуда частота излучения

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (5.8)$$

Сопоставив данное соотношение с формулой Бальмера (5.1), можно получить выражение для постоянной Ридберга  $R'$ :

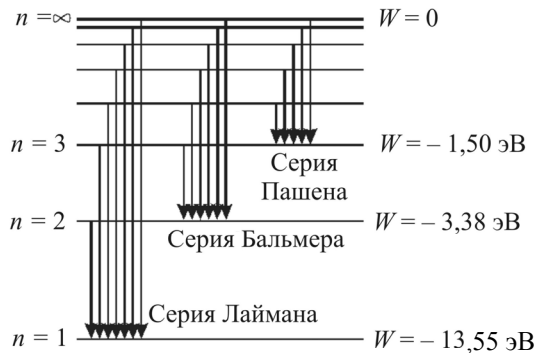


Рис. 5.3

$$R' = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2}. \quad (5.9)$$

Подставляя в формулу (5.8)  $m = 1$  и  $n = 2, 3, 4, \dots$ , получим группу линий, образующих серию Лаймана и соответствующих переходам электронов с возбужденных уровней ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) на основной (рис. 5.3).

Аналогично получают серии Бальмера, Пашена и др.

Теория Бора была первым шагом в создании квантовой механики. Дальнейшее развитие атомной физики показало справедливость постулатов Бора не только для атомов, но и для других микроскопических систем – для молекул и атомных ядер. Эта часть



теории Бора сохранилась при дальнейшем развитии квантовой теории. Иначе обстоит дело с моделью атома Бора, основанной на рассмотрении движения электрона в атоме по законам классической механики при наложении дополнительных условий квантования. Вскоре выяснилось, что электронам присущи свойства, не согласующиеся с представлением об их планетарном движении.

## 5.2. Волновые свойства вещества

Изучение строения атома привело к выводу, что поведение электронов в атоме противоречит законам классической физики, т.е. законам, установленным в опытах с телами макроскопических размеров. В частности, существование дискретных энергетических уровней электронной оболочки атома, закономерности перехода между уровнями и заполнения этих энергетических состояний невозможно было объяснить, пользуясь классическими представлениями механики и законами электромагнетизма.

### 5.2.1. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества

С классических позиций оказалось невозможным объяснить дифракцию электронов. Дело в том, что электроны, как и электромагнитные волны, способны обнаруживать дифракцию – явление, свойственное только волнам. Дифракционной решеткой для электронов служит кристалл. Пучок электронов, отраженный от кристалла или пропущенный через него, попадая на фотопленку, обнаруживает типичную картину дифракционных максимумов. Разберем это явление на двух опытах с дифракцией электронов на одной и на двух щелях.

В первом опыте поток электронов, предварительно разогнанный в электрическом поле до определенной скорости, проходит через щель (рис. 5.4). За экраном помещается фотопленка, позволяющая судить о распределении электронов в пространстве после прохождения ими щели (по степени затемнения).

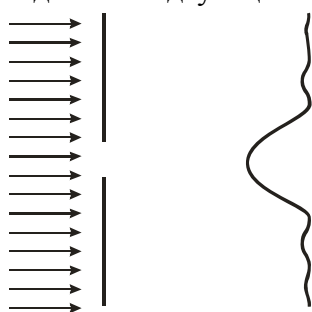


Рис. 5.4

В этом опыте следовало бы полагать, что число отклоненных от первоначального направления электронов, во-первых, было бы невелико, а во-вторых, монотонно бы убывало с увеличением угла отклонения. Однако наблюдается

типичная дифракционная картина с широким центральным максимумом.

Во втором опыте поток моноэнергетических электронов направили на две щели, сделанные в непрозрачном экране (рис. 5.5). Эти щели снабжены затворами.

Если оставить открытой только первую щель, то распределение электронов (отдельный электрон на фотопленке создает маленькое пятно) в различных точках экрана имеет вид, показанный на рис. 5.5, *а* (здесь не указаны менее важные дополнительные максимумы). Если бы была открыта только вторая щель, распределение электронов осталось бы таким же, но только соответствующая кривая сместилась бы вниз на расстояние, равное расстоянию между щелями (рис. 5.5, *б*). Если сложить эти распределения, то получается кривая, изображенная на рис. 5.5, *в*. Экспериментальное же распределение электронов при двух открытых щелях, изображенное на рис. 5.5, *г*, имеет совершенно иной вид.

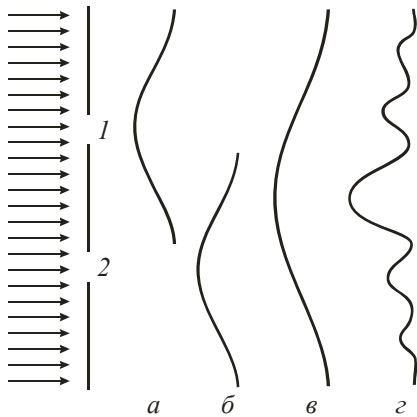


Рис. 5.5

Если исходить из того, что электрон – частица, то надо допустить, что каждый электрон проходит только через одну щель. Для него несущественно, открыта или закрыта другая щель. Если так, то, когда открыты обе щели, распределение пятен на пленке должно соответствовать рис. 5.5, *в*. Ведь электрон «не чувствует», открыта или закрыта другая щель, через которую он не проходит. Его поведение

за экраном в том и другом случае не должно зависеть от соседней щели. Опыт же показывает совершенно иное. Картина опыта с двумя открытыми щелями вовсе не совпадает с картиной наложения двух первоначальных пленок. Здесь наблюдается типичная картина интерференции от двух щелей с центральным максимумом (см. рис. 5.5, *г*).

Электроны ведут себя, как волны, причем так, как если бы каждый электрон (а не пучок!) представлял собой волну и интерферировал сам с собой.

При таком допущении это означало бы, что при двух открытых щелях каждый электрон проходит через обе щели сразу! Такое допущение переворачивает все наши установившиеся представления об электронах. Конечно, можно предположить, что мы до сих пор ошибались, рассматривая электроны как частицы, и теперь необходимо исправить ошибку: смотреть на них как на волны, которые способны проходить широкие полосы пространства, в частности, проходить через две (и несколько!) щелей сразу. Однако в том-то и парадокс, что такое представление с иных точек зрения не проходит. Ведь если электрон проходит через обе щели сразу, то, кажется, его можно уловить одновременно за той и другой щелью. Электрон как бы разделится на половинки, и мы в состоянии эти половинки обнаружить за щелями. Опыт ничего подобного нигде и никогда не показывает. Электрон неделим! Никто и никогда не наблюдал части электрона, он всегда выступает как целое. Если вообразить, что за щелями стоят миниатюрные счетчики, улавливающие электроны, то счетчики никогда не станут работать одновременно. Они будут работать поочередно, улавливая лишь целые электроны, а это свидетельствует о том, что электроны вовсе не проходят обе щели сразу, а всегда проходят лишь какую-то одну щель. Таким образом, мы запутываемся в противоречиях, и становится совершенно неясным, как же понимать электроны, а также другие элементарные частицы, так как они ведут себя в данном отношении аналогично электронам.

Важный шаг в разъяснении этих противоречий был сделан в 1924 г. французским физиком Луи де Бройлем: он выдвинул и обосновал гипотезу о том, что не только фотоны, но и любые другие частицы обладают волновыми свойствами, которые не учитываются классическими законами, но играют существенную роль в атомных явлениях.

Де Бройль обобщил соотношения для импульса  $p = hv/c = h/\lambda$  и энергии  $W = hv$  фотона, предположив, что они имеют универсальный характер для любых частиц, обладающих импульсом и энергией (электронов, протонов, атомов и др.). *Любой свободной (в отсутствие внешнего силового поля) частице ставится в соответствие волновой процесс с длиной волны  $\lambda$ , определяемой по формуле де Бройля:*

$$\lambda = h / p, \quad (5.10)$$

*и энергией*

$$W = hv. \quad (5.11)$$

Если теперь с этой новой точки зрения посмотреть на описание движения частицы и попытаться объяснить правило квантования круговых орбит Бора, то последнее получает следующую физическую интерпретацию: согласно де Бройлю, *возможными оказываются только те круговые орбиты, на которых укладывается целое число волн де Бройля*, т.е.

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = n. \quad (5.12)$$

Принимая далее во внимание, что  $\lambda = h / mv$ , из (5.12) получаем боровское правило квантования круговых орбит (5.2).

Гипотеза де Бройля была подтверждена экспериментально для пучка электронов американскими физиками К. Дэвиссоном и Л. Джермером в 1927 г. Российский физик В.А. Фабрикант доказал, что волновые свойства частиц не являются свойством их коллектива, а присущи каждой частице в отдельности.

Впоследствии дифракционные явления обнаружили также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Это окончательно доказало наличие волновых свойств микрочастиц и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося определенной длиной волны, рассчитываемой по формуле де Бройля. Открытие волновых свойств микрочастиц привело к появлению и развитию новых методов исследования структуры веществ, таких как *электронография* и *нейтронография*, а также к возникновению новой отрасли науки – *электронной оптики*.

Экспериментальное доказательство наличия волновых свойств микрочастиц привело к выводу о том, что перед нами универсальное явление, общее свойство материи. Но тогда волновые свойства должны быть присущи и макроскопическим телам. Почему же они не обнаружены экспериментально? Например, частице массой 1 г, движущейся со скоростью 1 м/с, соответствует волна де Бройля с  $\lambda = 6,62 \cdot 10^{-31}$  м. Такая длина волны лежит за пределами доступной наблюдению области (периодических структур с периодом  $\sim 10^{-31}$  м не существует). Поэтому классическая механика, которая была построена на наблюдениях над макротелами и в которой о волновых свойствах тел даже и не подозревали, прекрасно удовлетворяет задачам, возникающим при исследовании движения макроскопиче-

ских тел. И именно поэтому классическая механика непригодна для трактовки атомных явлений. Для решения задач этого типа нельзя ограничиваться механикой Ньютона и необходимо разработать более совершенную механику, которая бы учитывала волновые свойства вещества.

Эта задача была решена к исходу 20-х гг. XX в. Основные заслуги в ее решении принадлежат Вернеру Гейзенбергу, Эрвину Шредингеру, Полю Дираку.

*Волновая, или квантовая, механика – это совокупность законов движения частиц вещества, учитывающая их волновые свойства.*

Квантовая механика является одним из основных направлений развития современной физики. В квантовой механике изучаются закономерности явлений, происходящих в микромире – в пределах размеров порядка  $10^{-15} - 10^{-10}$  м. Объектами изучения квантовой механики являются атомы, молекулы, кристаллы, а также атомные ядра и элементарные частицы.

Физическими основами квантовой механики являются:

- а) представления Планка о квантах энергии;
- б) представления Эйнштейна о фотонах;
- в) идеи де Бройля о волновых свойствах частиц вещества.

### **5.2.2. Принцип неопределенности**

Для волны любой природы представление о том, что она имеет некоторые координаты, находится в определенном месте пространства, лишено физического смысла. Например, если волна, распространяющаяся по поверхности воды, достигла лодки, то не имеет смысла утверждать, что волна находится только в том месте, где она встретила с лодкой.

Классические материальные точки движутся по определенным траекториям, так что в любой момент времени точно фиксированы их координаты и импульсы. Электрон, протон, нейтрон и др. также называют частицами. Однако эти квантовые частицы (или микрочастицы) радикально отличаются от классических. Одно из основных различий заключается в том, что квантовая частица не движется по траектории, и неправомерно говорить об одновременных значениях ее координаты и импульса. Это вытекает из корпускулярно-волнового дуализма. Не имеет смысла говорить о «длине волны

в данной точке», а поскольку импульс выражается через длину волны, то отсюда следует, что частица с определенным импульсом имеет полностью неопределенную координату. И наоборот, если частица занимает точно определенное положение, то ее импульс является полностью неопределенным.

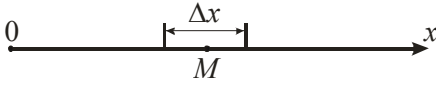


Рис. 5.6

Когда частица  $M$ , обладающая волновыми свойствами, движется вдоль оси  $x$ , ее координата на этой оси может

быть определена лишь с точностью  $\Delta x$ , называемой *неопределенностью координаты* частицы (рис. 5.6).

В конце 20-х гг. XX в. В. Гейзенбергом и Н. Бором был сформулирован *принцип неопределенности*: объект микромира невозможно одновременно с любой наперед заданной точностью характеризовать и координатой и импульсом.

Неопределенности же координат и компонент импульса связаны соотношениями:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h, \quad (5.13)$$

которые называют *соотношениями неопределенности*. Таким образом, *произведение неопределенности координаты частицы и неопределенности соответствующей компоненты ее импульса имеет порядок величины постоянной Планка*.

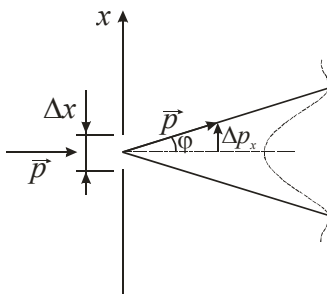


Рис. 5.7

Данное соотношение можно также проиллюстрировать на следующем примере. Попытаемся определить значение координаты свободно летящей микрочастицы, поставив на ее пути щель шириной  $\Delta x$ , расположенную перпендикулярно к направлению движения частицы (рис. 5.7). До прохождения частицы через щель ее составляющая импульса  $p_x$  имеет точное значение, равное нулю

(щель по условию перпендикулярна к импульсу), так что  $\Delta p_x = 0$ , зато координата  $x$  частицы является совершенно неопределенной. В момент прохождения частицы через щель положение меняется. Вместо полной неопределенности координаты  $x$  появляется неопределенность  $\Delta x$ , но это достигается ценой утраты определенности значения  $p_x$ . Действительно, вследствие дифракции имеется некото-

рая вероятность того, что частица будет двигаться в пределах угла  $2\varphi$ , где  $\varphi$  – угол, соответствующий первому дифракционному минимуму (максимумами высших порядков можно пренебречь, поскольку их интенсивность мала по сравнению с интенсивностью центрального максимума). Таким образом, появляется неопределенность:

$$\Delta p_x = p \sin\varphi.$$

Краю центрального дифракционного максимума (первому минимуму), получающемуся от щели шириной  $\Delta x$  (см. (4.40)), соответствует угол  $\varphi$ , для которого

$$\Delta x \sin\varphi = \lambda = h/p.$$

Из последних двух соотношений получаем соотношение неопределенностей:

$$\Delta x \Delta p_x = h.$$

Поскольку часть электронов отклоняется на угол, больший, чем  $\varphi$ , то появляется знак неравенства, как и в соотношениях (5.13).

Иногда соотношение неопределенностей получает следующее толкование: в действительности у микрочастицы имеются точные значения координат и импульсов, однако осязательное для такой частицы воздействие измерительного прибора не позволяет точно определить эти значения. Такое толкование является совершенно неправильным. Оно противоречит наблюдаемым на опыте явлениям дифракции микрочастиц.

Соотношение неопределенностей указывает, в какой мере можно пользоваться понятиями классической механики применительно к микрочастицам, в частности, с какой степенью точности можно говорить о траекториях микрочастиц. Движение по траектории характеризуется вполне определенными значениями координат и скорости в каждый момент времени.

Подставив в соотношение неопределенностей вместо  $p_x$  (в нерелятивистском приближении) произведение  $mv_x$ , получим соотношение

$$\Delta x \Delta v_x = h/m,$$

позволяющее оценить границы классической механики. Чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты

и скорости и, следовательно, с тем большей точностью применимо понятие траектории. Для макрочастиц неопределенности значений  $x$  и  $v_x$  обычно оказываются за пределами точности измерения этих величин, так что практически их движение будет неотличимо от движения по траектории.

Соотношение неопределенностей является одним из фундаментальных положений квантовой механики. Одного этого соотношения достаточно, чтобы получить ряд важных результатов. В частности, оно позволяет объяснить тот факт, что электрон не падает на ядро атома, а также оценить размеры простейшего атома и минимально возможную энергию электрона в таком атоме.

Принцип неопределенности показал, что в микромире далеко не всегда правомерна постановка тех вопросов, которые вполне естественны в классической теории, что нужен принципиально новый подход к самому описанию физических систем.

### *Примеры решения задач*

**№ 1.** Определите наименьшее и наибольшее значения частоты излучения в ультрафиолетовой серии Лаймана спектра атома водорода.

**Решение.** Все серии линий в спектре атома водорода могут быть описаны одной формулой, называемой обобщенной формулой Бальмера:

$$\nu = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $R'$  – постоянная Ридберга,  $R' = Rc = 3,293 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ;  $m$  и  $n$  – целые числа.

Ультрафиолетовая серия Лаймана получается при  $m = 1$ , отсюда:

$$\nu = R' \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Из анализа формулы понятно, что

$$\nu_{\min} = R' \left( 1 - \frac{1}{4} \right), \text{ т.е. } n = 2;$$

$$\nu_{\max} = R'(1 - 0), \text{ т.е. } n = \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Отсюда:

$$\nu_{\min} = 3,293 \cdot 10^{15} \cdot 0,75 = 2,470 \cdot 10^{15} \text{ Гц}, \nu_{\max} = 3,293 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$



**№ 2.** Пользуясь теорией Бора, определите для однократно ионизированного атома гелия длину волны в спектре, соответствующую переходу со 2-й орбиты на 1-ю.

Д а н о:  $m = 1$ ;  $n = 2$ ;  $Z = 2$ .

Р е ш е н и е. Согласно теории Бора частота излучения водородоподобной системы определяется формулой:

$$\nu = \frac{m_e e^4 Z^2}{8h^3 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $m$  и  $n$  – главные квантовые числа (номера орбит), а  $Z$  – зарядовое число атома (число электронов в атоме). Постоянная Ридберга

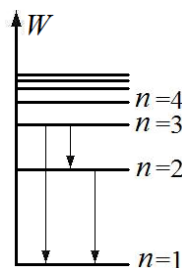
$$R' = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} = 3,293 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}. \text{ Для водородоподобного иона}$$

$$\nu = Z^2 \cdot R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 4 \cdot 3,293 \cdot 10^{15} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 9,879 \cdot 10^{15} \text{ Гц};$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{9,879 \cdot 10^{15}} = 0,304 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 30,4 \text{ нм}.$$

**№ 3.** Сколько квантов различных энергий может испускать атом водорода, если его электрон находится на 3-й орбите? Изобразите схему переходов.

Р е ш е н и е. Энергетическая диаграмма атома водорода имеет вид, показанный на рисунке, где  $n$  – номер орбиты. Схемы переходов обозначены стрелочками. Каждому переходу соответствует испущенный квант света. Согласно схеме, атом, находясь на 3-й орбите, может испустить 3 кванта с различной энергией.



**№ 4.** Протон движется со скоростью  $v = 10^8$  м/с. Определите длину волны де Бройля, учитывая изменение импульса протона в зависимости от скорости.

Д а н о:  $v = 10^8$  м/с,  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Р е ш е н и е. Длина волны де Бройля, соответствующая свободно движущейся частице, определяется по формуле:  $\lambda = \frac{h}{p}$ , где

импульс релятивистского протона  $p = m_p v / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Тогда

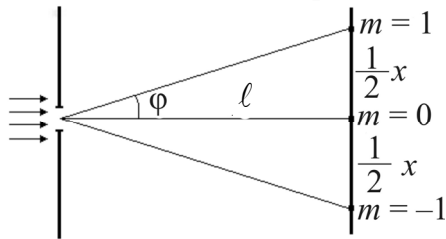
$$\lambda = \frac{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_p v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \sqrt{1-\frac{1 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}}}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^8} = 3,74 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

**№ 5.** На узкую щель шириной 1 мкм направлен параллельный пучок электронов, имеющих скорость  $3,65 \cdot 10^6$  м/с. Учитывая волновые свойства электронов, определите расстояние  $x$  между двумя максимумами интенсивности первого порядка в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на 10 см от щели.

**Д а н о:**  $b = 10^{-6}$  м,  $v = 3,65 \cdot 10^6$  м/с;  $\ell = 0,1$  м.

**Р е ш е н и е.** Скорость электронов в пучке почти в 100 раз меньше скорости света, следовательно, электроны можно считать нерелятивистскими и их импульс  $p = m_e v$ .

Длина волны де Бройля электронов в пучке



$$\lambda = \frac{h}{m_e v}.$$

Дифракция пучка электронов на щели описывается обычными формулами волновой оптики (4.39) и (4.40). Схема эксперимента представлена на рисунке, где показано расположение главного ( $m = 0$ ) максимума и максимумов 1-го порядка.

Условие максимума определяется формулой:

$$b \sin \varphi = \pm (m + 1/2)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Для 1-го порядка

$$b \sin \varphi = 1,5\lambda.$$

По рисунку видно, что  $\text{tg} \varphi = \frac{x}{2\ell}$ . В силу малости углов полагаем,

что  $\sin \varphi \approx \text{tg} \varphi$ . Тогда условие максимума 1-го порядка

$$\begin{aligned} b \frac{x}{2\ell} &= \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{3\lambda \ell}{b} = \frac{3h\ell}{m_e v b} = \\ &= \frac{3 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 0,1}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3,65 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} = 0,599 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 59,9 \text{ мкм.} \end{aligned}$$

## 5.3. Атомное ядро

### 5.3.1. Состав и характеристики атомного ядра

Атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Атомные ядра имеют размеры примерно  $10^{-14} \dots 10^{-15}$  м (линейные размеры атома  $\sim 10^{-10}$  м).

Атомное ядро состоит из элементарных частиц – *протонов* и *нейтронов*. Протонно-нейтронная модель ядра была предложена российским физиком Д.Д. Иваненко в 1932 г., а впоследствии развита В. Гейзенбергом.

Протон  $p$  имеет положительный заряд, равный заряду электрона, и массу  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1836 m_e$ , где  $m_e$  – масса электрона. Нейтрон  $n$  – нейтральная частица с массой  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1839 m_e$ . Массу протонов и нейтронов часто выражают в других единицах – в атомных единицах массы (см. (2.1)). Массы протона и нейтрона равны приблизительно одной атомной единице массы. Протоны и нейтроны называются *нуклонами* (от лат. *nucleus* – ядро). Общее число нуклонов в атомном ядре называется *массовым числом*  $A$ .

Эксперименты показывают, что ядра не имеют резких границ. В центре ядра существует определенная плотность ядерного вещества, и она постепенно уменьшается до нуля с увеличением расстояния от центра. Из-за отсутствия четко определенной границы ядра его «радиус» определяется как такое расстояние от центра, на котором плотность ядерного вещества уменьшается в два раза. Среднее распределение плотности материи для большинства ядер оказывается не просто сферическим. Большинство ядер деформированно. Часто ядра имеют форму вытянутых или сплюснутых эллипсоидов.

Атомное ядро характеризуется *зарядом*  $Ze$ , где  $Z$  – *зарядовое число* ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером элемента в Периодической системе химических элементов Менделеева.

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом:  ${}^A_Z X$ , где  $X$  – символ химического элемента;  $Z$  – атомный номер (число протонов в ядре);  $A$  – массовое число (число нуклонов в ядре). Массовое число  $A$  приблизительно равно массе ядра в атомных единицах массы.

Так как атом нейтрален, то заряд ядра  $Z$  определяет и число электронов в атоме. Заряд ядра определяет специфику данного химического элемента, т. е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Ядра с одинаковыми зарядовыми числами  $Z$ , но с разными массовыми числами  $A$  (т.е. с разными числами нейтронов  $N = A - Z$ ) называются *изотопами*, а ядра с одинаковыми  $A$ , но разными  $Z$  – *изобарами*. Например, водород ( $Z = 1$ ) имеет три изотопа:  ${}^1_1\text{H}$  – протий ( $Z = 1, N = 0$ ),  ${}^2_1\text{H}$  – дейтерий ( $Z = 1, N = 1$ ),  ${}^3_1\text{H}$  – тритий ( $Z = 1, N = 2$ ); олово – десять изотопов и т. д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами.

Квантовая теория строго ограничивает значения энергий, которыми могут обладать составные части ядер. Совокупности протонов и нейтронов в ядрах могут находиться только в определенных дискретных энергетических состояниях, характерных для данного изотопа.

Когда электрон в атоме переходит из более высокого в более низкое энергетическое состояние, разность энергий излучается в виде фотона. Энергия этих фотонов имеет порядок нескольких электронвольт. Для ядер энергетические уровни лежат в интервале примерно от 1 до 10 МэВ. При переходах между этими уровнями испускаются фотоны очень больших энергий ( $\gamma$ -кванты).

### 5.3.2. Ядерные силы. Энергия связи атомных ядер

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Между составляющими ядро нуклонами действуют особые, специфические для ядра силы, значительно превышающие кулоновские силы отталкивания между протонами. Они называются *ядерными силами*.

С помощью экспериментальных данных по рассеянию нуклонов на ядрах, ядерным превращениям и т.д. доказано, что ядерные силы намного превышают гравитационные и электромагнитные взаимодействия и не сводятся к ним. Ядерные силы относятся к классу так называемых *сильных взаимодействий*.

Перечислим основные свойства ядерных сил:

1) ядерные силы являются *силами притяжения*;

2) ядерные силы являются *короткодействующими* – их действие проявляется только на расстояниях примерно  $10^{-15}$  м. При увеличении расстояния между нуклонами ядерные силы быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших их радиуса действия, оказываются примерно в 100 раз больше кулоновских сил, действующих между протонами на том же расстоянии;

3) ядерным силам свойственна *зарядовая независимость*: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или, наконец, между протоном и нейтроном, одинаковы по величине. Отсюда следует, что ядерные силы имеют неэлектрическую природу;

4) ядерным силам свойственно *насыщение*, т. е. каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов;

5) ядерные силы *не являются центральными*, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

Массу ядер очень точно можно определить с помощью *масс-спектрометров* – измерительных приборов, разделяющих с помощью электрических и магнитных полей пучки заряженных частиц (обычно ионов) с разными удельными зарядами  $q/m$ . Масс-спектрометрические измерения показали, что *масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов*. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия – *энергия связи атомного ядра*. Энергия покоя частицы связана с ее массой соотношением Эйнштейна  $W_0 = mc^2$ . Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммарной энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов.

Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. *Энергия связи  $W_{св}$  атомного ядра равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на такие расстояния, при которых они практически не взаимодействуют друг с другом*.

Мерой энергии связи является *дефект массы* ядра – разность между суммарной массой (взятых по отдельности) нуклонов, образующих ядро, и массой ядра:

$$\Delta m = [Zm_p + (A-Z)m_n] - m_{\text{я}}, \quad (5.14)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  – соответственно массы протона, нейтрона и ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра. В таблицах обычно приводятся не массы ядер  $m_{\text{я}}$ , а массы атомов. Добавляя и вычитая массу всех электронов в атоме, выражение для дефекта массы ядра можно привести к виду

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{атома}}, \quad (5.15)$$

где  $m_{\text{H}}$  – масса атома водорода. Для энергии связи получаем соотношение

$$W_{\text{св}} = \Delta mc^2. \quad (5.16)$$

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, т.е.  $W_{\text{св}}/A$ , называется *удельной энергией связи*.

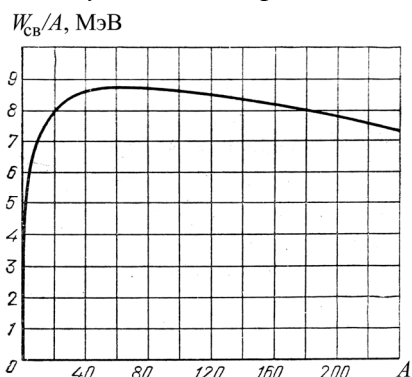


Рис. 5.8

На рис. 5.8 изображена примерная зависимость удельной энергии связи  $W_{\text{св}}/A$  от массового числа  $A$ . Сильнее всего связаны нуклоны в ядрах с массовыми числами порядка 50–60 (т.е. для элементов от Cr до Zn). Энергия связи для этих ядер достигает 8,7 МэВ/нуклон. С ростом  $A$  удельная энергия связи постепенно уменьшается; для самого тяжелого природного элемента –

урана – она составляет 7,5 МэВ/нуклон. Такая зависимость удельной энергии связи от массового числа делает энергетически возможными два процесса: 1) *деление* тяжелых ядер на несколько более легких ядер и 2) *слияние (синтез)* легких ядер в одно ядро. Оба процесса должны сопровождаться выделением большого количества энергии. Так, например, деление одного ядра с массовым числом  $A = 240$  (удельная энергия связи равна 7,5 МэВ/нуклон) на два ядра с массовыми числами  $A = 120$  (удельная энергия связи равна 8,5 МэВ/нуклон) привело бы к высвобождению энергии в 240 МэВ. Слияние двух ядер тяжелого водорода  ${}^2_1\text{H}$  в ядро гелия  ${}^4_2\text{He}$  привело бы к выделению энергии, равной 24 МэВ. Для сравнения укажем, что при соединении одного атома углерода с двумя атомами кислорода (сгорание угля до  $\text{CO}_2$ ) выделяется энергия порядка 5 эВ.

Ядра со значениями массового числа  $A$  от 50 до 60 являются энергетически наиболее выгодными. В связи с этим возникает вопрос: почему ядра с иными значениями  $A$  оказываются стабильными? Ответ заключается в следующем. Для того чтобы разделиться на несколько частей, тяжелое ядро должно пройти через ряд промежуточных состояний, энергия которых превышает энергию основного состояния ядра. Следовательно, для процесса деления ядру требуется дополнительная энергия (*энергия активации*), которая затем возвращается обратно, приплюсовываясь к энергии, выделяющейся при делении за счет изменения энергии связи. В обычных условиях ядру неоткуда взять энергию активации, вследствие чего тяжелые ядра не претерпевают спонтанного деления. Энергия активации может быть сообщена тяжелому ядру захваченным им дополнительным нейтроном. Процесс деления ядер урана или плутония под действием захватываемых ядрами нейтронов лежит в основе действия *ядерных реакторов* и *атомной бомбы*.

Для слияния легких ядер в одно ядро они должны приблизиться друг к другу на очень близкое расстояние ( $\sim 10^{-15}$  м). Такому сближению ядер препятствует кулоновское отталкивание между ними. Для того чтобы преодолеть это отталкивание, ядра должны двигаться с огромными скоростями, соответствующими температурам порядка нескольких сотен миллионов кельвин. По этой причине процесс *синтеза легких ядер* называется *термоядерной реакцией*. Термоядерные реакции протекают в недрах Солнца и звезд. В земных условиях пока были осуществлены неуправляемые термоядерные реакции при взрывах *водородных бомб*.

### 5.3.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

*Радиоактивностью* называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Такие превращения претерпевают только нестабильные ядра. К числу радиоактивных процессов относятся: 1)  $\alpha$ -распад; 2)  $\beta$ -распад (в том числе электронный захват); 3)  $\gamma$ -излучение ядер; 4) спонтанное деление тяжелых ядер; 5) протонная радиоактивность.

Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется *материнским*, возникающее ядро – *дочерним*.

Радиоактивность, наблюдающаяся у ядер, существующих в природных условиях, называется *естественной*. Радиоактивность

ядер, полученных посредством ядерных реакций, называется *искусственной*. Между искусственной и естественной радиоактивностью нет принципиального различия. Процесс радиоактивного превращения в обоих случаях подчиняется одним и тем же законам.

Естественная радиоактивность была открыта в 1896 г. А.А. Беккерелем. Большой вклад в изучение радиоактивных веществ внесли супруги Пьер Кюри и Мария Склодовская-Кюри.

Радиоактивное излучение бывает трех типов:  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -излучение.  $\alpha$ -Излучение представляет собой поток ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$ : заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ , а масса примерно 4 а.е.м.  $\alpha$ -Частица отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (например, поглощается слоем алюминия толщиной примерно 0,05 мм).

$\beta$ -Излучение представляет собой поток электронов.  $\beta$ -Частица отклоняется электрическим и магнитным полями, ее ионизирующая способность значительно меньше (примерно на два порядка), а проникающая способность гораздо больше, чем у  $\alpha$ -частиц (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 2 мм).

$\gamma$ -Излучение представляет собой коротковолновое электромагнитное излучение с малой длиной волны менее  $10^{-10}$  м и вследствие этого ярко выраженными корпускулярными свойствами, т.е. является потоком  $\gamma$ -квантов (фотонов);  $\gamma$ -излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (например, проходит через слой свинца толщиной 5 см), при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию.

Теория радиоактивного распада строится на предположении о том, что распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Так как отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, то можно считать, что число ядер, распавшихся в среднем за интервал времени от  $t$  до  $t + dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$  и числу  $N$  нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ :

$$dN = -\lambda N dt,$$

где  $\lambda$  – постоянная для данного радиоактивного вещества величина, называемая *постоянной радиоактивного распада*; знак «минус» указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада



уменьшается, т.е. приращение числа нераспавшихся ядер  $dN < 0$ . Разделив переменные и интегрируя, получим закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (5.17)$$

где  $N_0$  – начальное число *нераспавшихся* ядер в момент времени  $t = 0$ ;  $N$  – число *нераспавшихся* ядер в момент времени  $t$ . Закон радиоактивного распада (5.17) констатирует, что *число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненциальному закону*.

Число распадов, происходящих с ядрами вещества в единицу времени, называется *активностью*  $a$  изотопа:

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \quad (5.18)$$

Единица измерения активности в СИ – *беккерель*,  $[a] = \text{Бк}$ ; внесистемной единицей активности является один *кюри* (Ки):  $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$ .

Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: *среднее время жизни*  $\tau$  радиоактивного ядра и *период полураспада*  $T_{1/2}$ . Можно показать, что среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра есть величина, обратная постоянной радиоактивного распада  $\lambda$ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.19)$$

Период полураспада  $T_{1/2}$  – время, за которое исходное число радиоактивных ядер уменьшается вдвое. Согласно (5.17)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

откуда

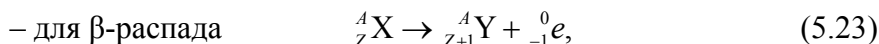
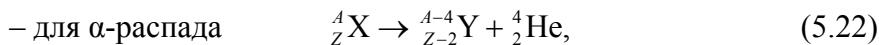
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (5.20)$$

Периоды полураспада для естественно-радиоактивных элементов колеблются от десятимиллионных долей секунды до многих миллиардов лет.

С учетом (5.20) закон радиоактивного распада (5.17) можно представить в более удобном для практического применения виде:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (5.21)$$

Радиоактивный распад происходит в соответствии со следующими *правилами смещения*, позволяющими установить, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра:



где  ${}^A_Z\text{X}$  – материнское ядро; Y – дочернее ядро;  ${}^4_2\text{He}$  – ядро гелия ( $\alpha$ -частица);  ${}^0_{-1}e$  – электрон (заряд его равен  $-e$ , а массовое число – нулю).

Правила смещения являются следствием двух законов, выполняющихся при радиоактивных распадах, – закона сохранения электрического заряда и закона сохранения массового числа: сумма зарядов (массовых чисел) возникающих ядер и частиц равна заряду (массовому числу) исходного ядра.

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, радиоактивными. Это приводит к возникновению цепочки или ряда радиоактивных превращений, заканчивающихся стабильным элементом. Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется *радиоактивным семейством*.

#### 5.3.4. Ядерные реакции. Элементы ядерной энергетики

*Ядерной реакцией* называется процесс взаимодействия атомно-го ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер). Взаимодействие реагирующих частиц возникает при сближении их до расстояний порядка  $10^{-15}$  м благодаря действию ядерных сил. При рассмотрении ядерных реакций (как и других процессов) используются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и ряда других физических величин.

Наиболее распространенным видом ядерной реакции является взаимодействие легкой частицы  $a$  с ядром X, в результате которого образуется легкая частица  $b$  и ядро Y:



где  $Q$  – энергия, выделяющаяся в результате реакции (ее, как и в химии, часто включают в уравнение самой реакции). Реакция явля-

ется *экзотермической* (идущей с выделением энергии), если  $Q > 0$ , и *эндотермической* (идущей с поглощением энергии), если  $Q < 0$ . Количество выделяющейся энергии называется *энергией реакции*. Она определяется разностью масс (выраженных в энергетических единицах) исходных и конечных частиц:

$$Q = \left( \sum_i m_i^{\text{нач}} - \sum_j m_j^{\text{кон}} \right) c^2, \quad (5.25)$$

где  $c$  – скорость света.

Уравнение реакций принято также записывать в сокращенном виде:



В скобках указываются участвующие в реакции легкие частицы: сначала исходная, затем конечная. В качестве легких частиц  $a$  и  $b$  могут фигурировать нейтрон ( $n$ ), протон ( $p$ ), дейтрон ( $d$ ),  $\alpha$ -частица ( $\alpha$ ) и  $\gamma$ -фотон ( $\gamma$ ).

В 1936 г. Н. Бор установил, что реакции, вызываемые не очень быстрыми частицами, протекают в два этапа. Первый этап заключается в захвате приблизившейся к ядру  $X$  частицы  $a$  и в образовании промежуточного ядра  $\Pi$ , называемого *составным ядром*. Энергия, принесенная частицей  $a$  (она складывается из кинетической энергии частицы и энергии ее связи с ядром), за очень короткое время перераспределяется между всеми нуклонами составного ядра, в результате чего это ядро оказывается в возбужденном состоянии. На втором этапе составное ядро испускает частицу  $b$ . Символически такое протекание реакции записывается следующим образом:



Если испущенная частица тождественна с захваченной ( $b \equiv a$ ), процесс (5.27) называют *рассеянием*. В случае, когда энергия частицы  $b$  равна энергии частицы  $a$  ( $W_b = W_a$ ), *рассеяние* является *упругим*, в противном случае (т.е. при  $W_b \neq W_a$ ) – *неупругим*. Ядерная реакция имеет место, если частица  $b$  не тождественна с частицей  $a$ .

Ядерные реакции классифицируются:

1) по роду участвующих частиц: возникающие под действием нейтронов; под действием заряженных частиц (протонов,  $\alpha$ -частиц и др.); под действием  $\gamma$ -квантов;

2) по энергии вызывающих их частиц: малые энергии  $\sim 1$  эВ

(с нейтронами); средние энергии  $\sim 1$  МэВ (с  $\gamma$ -квантами,  $\alpha$ -частицами); высокие энергии  $\sim 10^3$  МэВ (рождение новых элементарных частиц);

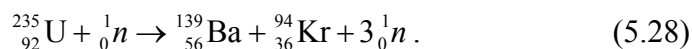
3) по роду участвующих в них ядер: на легких ядрах ( $A < 50$ ); на средних ядрах ( $50 < A < 100$ ); на тяжелых ядрах ( $A > 100$ );

4) по характеру ядерных превращений: с испусканием нейтронов; с испусканием заряженных частиц; реакции захвата (излучается  $\gamma$ -квант).

Одним из двух принципиально возможных способов освобождения ядерной энергии является *деление тяжелых ядер*. В 1939 г. немецкими учеными О. Ганом и Ф. Штрассманом было открыто деление ядер урана. Продолжая исследования, начатые Э. Ферми, они установили, что при бомбардировке урана нейтронами возникают элементы средней части периодической системы – радиоактивные изотопы бария ( $Z = 56$ ), криптона ( $Z = 36$ ) и др.

Уран встречается в природе в виде двух изотопов:  ${}_{92}^{238}\text{U}$  (99,3 %) и  ${}_{92}^{235}\text{U}$  (0,7 %). При бомбардировке нейтронами ядра обоих изотопов могут расщепляться на два осколка. При этом реакция деления  ${}_{92}^{235}\text{U}$  наиболее интенсивно идет на медленных (тепловых) нейтронах, в то время как ядра  ${}_{92}^{238}\text{U}$  вступают в реакцию деления только с быстрыми нейтронами с энергией порядка 1 МэВ.

Основной интерес для ядерной энергетики представляет реакция деления ядра  ${}_{92}^{235}\text{U}$ . Типичная реакция деления этого ядра сопровождается испусканием вторичных нейтронов:



Энергия, выделяющаяся при делении одного ядра урана, огромна – порядка 200 МэВ, что составляет 0,9 МэВ/нуклон. При полном делении всех ядер, содержащихся в 1 г урана, выделяется такая же энергия, как и при сгорании 3 т угля или 2,5 т нефти.

При делении ядра урана-235, которое вызвано столкновением с нейтроном, освобождается 2–3 нейтрона. При благоприятных условиях эти нейтроны могут попасть в другие ядра урана и вызвать их деление. На этом этапе появятся уже от 4 до 9 нейтронов, способных вызвать новые распады ядер урана и т.д. Такой лавинообразный процесс называется *цепной реакцией*.

Цепная реакция в уране с повышенным содержанием урана-235 может развиваться только тогда, когда масса урана превосходит так называемую *критическую массу*. Для чистого урана-235 критическая масса составляет около 50 кг. Критическую массу урана можно во много раз уменьшить, если использовать так называемые *замедлители* нейтронов. Наилучшими замедлителями нейтронов являются *тяжелая вода*  $D_2O$ , графит, ядра которого не поглощают нейтронов. При упругом взаимодействии с ядрами дейтерия или углерода нейтроны замедляются до тепловых скоростей.

Применение замедлителей нейтронов и специальной оболочки из бериллия, которая отражает нейтроны, позволяет снизить критическую массу.

Устройство, в котором поддерживается управляемая реакция деления ядер, называется *ядерным* (или *атомным*) *реактором* (рис. 5.9).

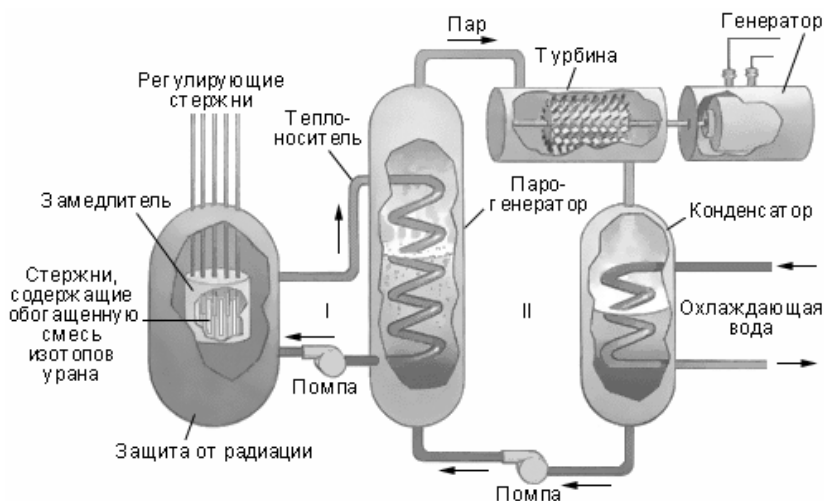


Рис. 5.9

Первый ядерный реактор был построен в 1942 г. в США под руководством Э. Ферми. В нашей стране первый реактор был построен в 1946 г. под руководством И.В. Курчатова, первая в мире атомная электростанция на медленных нейтронах мощностью 5 МВт – в Обнинске в 1954 г. Топливом является обогащенная смесь изотопов урана с повышенным содержанием урана-235 (до 3 %).

В активную зону вводятся регулируемые стержни, содержащие кадмий или бор, которые интенсивно поглощают нейтроны. Введение стержней в активную зону позволяет управлять скоростью цепной реакции.

Активная зона охлаждается с помощью прокачиваемого теплоносителя, в качестве которого может применяться вода или металл с низкой температурой плавления (например, натрий, имеющий температуру плавления 98 °С). В парогенераторе теплоноситель передает тепловую энергию воде, превращая ее в пар высокого давления. Пар направляется в турбину, соединенную с электрогенератором. Из турбины пар поступает в конденсатор. Во избежание утечки радиации контуры теплоносителя I и парогенератора II работают по замкнутому циклам.

Турбина атомной электростанции является тепловой машиной с КПД~30 %. Остальная энергия уносится водой, охлаждающей конденсатор. Это приводит к локальному перегреву естественных водоемов и последующему возникновению экологических проблем.

Однако главная проблема состоит в обеспечении полной радиационной безопасности. После аварий на некоторых АЭС, в частности на АЭС в Пенсильвании (США, 1979 г.) и на Чернобыльской АЭС (СССР, 1986 г.), проблема безопасности ядерной энергетики встала с особенной остротой.

Наряду с ядерным реактором на медленных нейтронах большой практический интерес представляют *реакторы, работающие на быстрых нейтронах*. В таких реакторах ядерным горючим является обогащенная смесь, содержащая не менее 15 % изотопа  $^{235}_{92}\text{U}$ . Преимущество реакторов на быстрых нейтронах состоит в том, что при их работе ядра урана-238, поглощая нейтроны, посредством двух последовательных  $\beta$ -распадов превращаются в ядра плутония, которые затем можно использовать в качестве ядерного топлива: из 1 кг урана-238 получается до 1,5 кг плутония.

Первая атомная станция на быстрых нейтронах мощностью 350 МВт построена в г. Шевченко на берегу Каспийского моря. Нововоронежская АЭС имеет мощность 1500 МВт.

Второй путь освобождения ядерной энергии связан с реакциями синтеза, дающими наибольшую энергию на единицу массы. При слиянии легких ядер дейтерия и трития и образовании нового ядра выделяется большое количество энергии:



где  $Q = 17,6 \text{ МэВ} = 3,5 \text{ МэВ/нуклон}$ .

Количество дейтерия в стакане простой воды эквивалентно 60 л бензина. Количество дейтерия в океанской воде  $4 \cdot 10^{13}$  т, что соответствует энергии  $10^{17}$  МВт·год.

Реакции слияния легких ядер называются термоядерными реакциями, так как они могут протекать только при очень высоких температурах  $10^8$ – $10^9$  К. При такой температуре вещество находится в полностью ионизированном состоянии, которое называется *плазмой*.

Первая термоядерная реакция в СССР была осуществлена в 1953 г., а через полгода – в США. *Управляемые термоядерные реакции* дадут человечеству новый экологически чистый и практически неисчерпаемый источник энергии. Однако получение сверхвысоких температур и удержание плазмы, нагретой до миллиарда градусов, представляет собой труднейшую научно-техническую задачу на пути осуществления управляемого термоядерного синтеза.

На данном этапе развития науки и техники удалось осуществить только *неуправляемую реакцию синтеза* в водородной бомбе. Высокая температура, необходимая для ядерного синтеза, достигается здесь с помощью взрыва обычной урановой или плутониевой бомбы.

Ученые ряда стран настойчиво работают над изысканием способов осуществления управляемого термоядерного синтеза. В настоящее время в рамках международного проекта во Франции строится экспериментальный термоядерный реактор.

#### 5.4. Элементарные частицы

В начале 30-х гг. XX в. физика нашла приемлемое описание строения вещества на основе четырех типов элементарных частиц – протонов, нейтронов, электронов и фотонов. Добавление пятой частицы – нейтрино – позволило объяснить также процессы радиоактивного распада. Казалось, что названные элементарные частицы являются первокирпичиками мироздания.

Но эта кажущаяся простота вскоре исчезла: был обнаружен позитрон, предсказанный Дираком. В 1936 г. среди продуктов взаимодействия космических лучей с веществом был открыт первый мезон. После этого удалось наблюдать мезоны иной природы, а также другие необычные частицы. Эти частицы рождались под действием космических лучей довольно редко. Однако после того,

как были построены ускорители, позволяющие получать частицы больших энергий, удалось открыть более 300 новых частиц.

Что же тогда понимать под словом «элементарная»? «Элементарная» – логический антипод «сложной». Элементарные частицы – значит первичные, далее неразложимые частицы, из которых состоит вся материя. К сороковым годам XX в. был известен уже ряд превращений «элементарных» частиц. Число частиц продолжает расти. Большая их часть нестабильна. Среди десятков известных микрочастиц всего несколько устойчивых, неспособных к самопроизвольным превращениям. Не является ли устойчивость по отношению к самопроизвольным превращениям признаком элементарности?

Ядро дейтерия (дейтрон) состоит из протона и нейтрона. Как частица дейтрон совершенно устойчив. В то же время составная часть дейтрона нейтрон  $\beta$ -радиоактивен, т.е. неустойчив. Этот пример показывает, что понятия устойчивости и элементарности не тождественны. В современной физике термин «элементарные частицы» обычно употребляется для наименования большой группы мельчайших частиц материи (которые не являются атомами или атомными ядрами).

Все элементарные частицы обладают исключительно малыми массами и размерами. Большинство из них имеют массу порядка массы протона –  $1,6 \cdot 10^{-27}$  кг (заметно меньше лишь масса электрона  $0,9 \cdot 10^{-30}$  кг). Микроскопические размеры и массы элементарных частиц обуславливают квантовые закономерности их поведения. Наиболее важное квантовое свойство всех элементарных частиц – способность рождаться и уничтожаться (испускаться и поглощаться) при взаимодействии с другими частицами.

Известны четыре типа различных по своей природе взаимодействий между частицами: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Каковы особенности четырех перечисленных видов взаимодействия?

Наиболее сильным является взаимодействие между ядерными частицами (ядерные силы), поэтому его принято называть *сильным*. Уже отмечалось, что ядерные силы действуют лишь при весьма малых расстояниях между частицами: радиус действия порядка  $10^{-15}$  м.

Следующим по величине является *электромагнитное* взаимодействие. Оно меньше сильного на два порядка. Но с расстоянием



оно меняется медленнее, как  $1/r^2$ , так что радиус действия электромагнитных сил бесконечен.

Далее следует *слабое взаимодействие*, обусловленное участием в реакциях нейтрино. По порядку величины это взаимодействие меньше сильного в  $10^{14}$  раз. По-видимому, радиус действия здесь такой же, как и в случае сильного взаимодействия.

Самое малое из известных взаимодействий – *гравитационное*. Оно меньше сильного на 39 порядков – в  $10^{39}$  раз! С расстоянием гравитационные силы убывают столь же медленно, как и электромагнитные, так что их радиус действия также бесконечен.

В космосе основная роль принадлежит гравитационным взаимодействиям, так как радиус действия сильных и слабых взаимодействий ничтожен. Электромагнитные взаимодействия играют ограниченную роль потому, что электрические заряды противоположных знаков стремятся к образованию нейтральных систем. Гравитационные силы – всегда силы притяжения. Их нельзя скомпенсировать силой обратного знака, от них нельзя экранироваться. Отсюда их доминирующая роль в космосе.

В реакциях, обусловленных взаимодействиями частиц, гравитационные силы практически никакой роли не играют.

Перечисленные взаимодействия имеют, по-видимому, разную природу, т.е. не сводятся одно к другому. В настоящее время нет возможности судить, исчерпывают ли указанные взаимодействия все имеющиеся в природе взаимодействия.

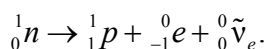
У каждой элементарной частицы есть соответствующая ей античастица. *Античастица* – элементарная частица, имеющая те же значения массы и прочих физических характеристик, что и основная частица, но отличающаяся от нее знаком некоторых характеристик взаимодействий (электрического заряда и др.), например, электрон и позитрон.

Класс элементарных частиц, участвующих в сильном взаимодействии, называется *адронами* (протон, нейтрон и др.). Класс частиц, не обладающих сильным взаимодействием, называется *лептонами*. К лептонам относятся электрон, мюон, нейтрино, тяжелый лептон и соответствующие им античастицы.

При столкновении частицы и античастицы они могут взаимно уничтожиться – аннигилировать. *Аннигиляция* – исчезновение (превращение) частицы и соответствующей ей античастицы с образова-

нием двух  $\gamma$ -квантов. При этом соблюдаются все известные законы сохранения – законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, зарядов. Для рождения пары электрон – позитрон необходимо израсходовать энергию, не меньшую суммы собственных энергий этих частиц, т.е.  $\sim 10^6$  эВ. При аннигиляции такой пары эта энергия либо отдается с порождаемым при аннигиляции излучением, либо распределяется среди других частиц.

Из закона сохранения заряда следует, что заряженная частица не может возникнуть без того, чтобы не возникла другая с зарядом обратного знака (чтобы суммарный заряд всей системы частиц не менялся). Примером такой реакции является реакция превращения нейтрона в протон с одновременным образованием электрона и вылетом антинейтрино:



Электрический заряд при этом превращении сохраняется. Точно так же сохраняется он при превращении фотона в пару электрон – позитрон или при рождении такой же пары в результате столкновения двух электронов.

Существует гипотеза, что все элементарные частицы являются комбинациями трех основных частиц, называемых *кварками*, и их античастиц. В свободном состоянии кварки не были обнаружены (несмотря на многочисленные их поиски на ускорителях высоких энергий, в космических лучах и окружающей среде).

Невозможно описать свойства и превращения микрочастиц без какой-либо их систематизации. Систематизации, построенной на основе строгой теории, нет.

Две основные группы элементарных частиц составляют сильно взаимодействующие (*адроны*) и слабо взаимодействующие (*лептоны*) частицы. Адроны делятся на *мезоны* и *барионы*. Барионы подразделяются на *нуклоны* и *гипероны*. К лептонам относятся электроны, мюоны и нейтрино. Ниже приведены величины, с помощью которых систематизируют микрочастицы:

1. Массовое, или *барионное*, число  $A$ . Многочисленные факты, наблюдаемые в процессе деления ядер, рождения пары нуклон – антинуклон, позволяют утверждать, что в любом процессе число нуклонов остается постоянным. Всем барионам приписывают число  $A = +1$ , каждой античастице  $A = -1$ . Закон сохранения барионного

заряда выполняется точно во всех ядерных процессах. Кратными значениями барионного числа обладают сложные частицы. У всех мезонов и лептонов барионное число равно нулю.

2. Электрический заряд  $q$ . Представляет собой число единиц электрического заряда (в единицах положительного заряда протона), присущего частице.

3. *Изотопический спин* (не имеет отношения к реальному спину). Силы, действующие между нуклонами в ядре, почти не зависят от типа нуклонов, т.е. ядерные взаимодействия  $p-p$ ,  $p-n$  и  $n-n$  одинаковы. Эта симметрия ядерных сил приводит к сохранению величины, называемой изотопическим спином. *Изоспин* сохраняется в сильных взаимодействиях и не сохраняется в процессах, вызванных электромагнитным и слабым взаимодействием.

4. *Странность*. Чтобы объяснить, почему не происходят некоторые процессы с участием адронов, М. Гелл-Манн и К. Нишиджима в 1953 г. предложили ввести новое квантовое число, которое они назвали странностью. Странность стабильных адронов лежит в пределах от  $-3$  до  $+3$  (целые числа). Странность лептонов не определена. В сильных взаимодействиях странность сохраняется.

5. *Спин*. Характеризует спиновый момент импульса.

6. *Четность*. Внутреннее свойство частицы, связанное с ее симметрией по отношению к правому и левому. До недавнего времени физики полагали, что различия между правым и левым нет. Впоследствии оказалось, что они неравноценны для всех процессов слабого взаимодействия. Это было одним из наиболее удивительных открытий в физике.

В классической физике вещество и физическое поле противопоставлялись друг другу как два вида материи. Вещество складывается из элементарных частиц, это вид материи, обладающей массой покоя. У вещества структура дискретна, у поля непрерывна. Но квантовая физика привела к нивелированию этого представления. В классической физике полагается, что на частицы действуют силовые поля – гравитационное и электромагнитное. Других полей классическая физика не знала. В квантовой физике за полями видят истинных переносчиков взаимодействия – кванты этих полей, т.е. частицы. Для классических полей это гравитоны и фотоны. Носителями сильных взаимодействий являются *глюоны*. Когда поля достаточно сильны и квантов много, мы перестаем различать их как от-

дельные частицы и воспринимаем как поле. С другой стороны, любая микрочастица (элемент вещества) обладает двойственной корпускулярно-волновой природой.

### Примеры решения задач

**№ 1.** Какая доля радиоактивных ядер изотопа  $^{14}_6\text{C}$  распадается за 100 лет, если его период полураспада 5370 лет?

Д а н о:  $t = 100$  лет;  $T_{1/2} = 5370$  лет.

Р е ш е н и е. По закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Количество распавшихся радиоактивных ядер

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left( 1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \right).$$

Отсюда доля распавшихся ядер

$$\varepsilon = \frac{\Delta N}{N} \cdot 100 \% = \left( 1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \right) \cdot 100 \% = \left( 1 - 2^{-\frac{100}{5370}} \right) \cdot 100 \% = 1,3 \ \%.$$

**№ 2.** Во сколько раз отличается удельная энергия связи ядер  $^7_3\text{Li}$  и  $^7_4\text{Be}$ ?

Р е ш е н и е. Удельная энергия связи ядра  $W_{\text{уд.св}} = \frac{W_{\text{св}}}{A}$ , где  $A$  – массовое число;  $W_{\text{св}}$  – энергия связи ядра,  $W_{\text{св}} = \Delta m c^2 = (Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\text{я}}) c^2$ .

$$\text{Тогда } W_{\text{св.Li}} = \frac{(3 m_p + 4 m_n - m_{\text{Li}}) c^2}{7}, \quad W_{\text{св.Be}} = \frac{(4 m_p + 3 m_n - m_{\text{Be}}) c^2}{7},$$

$$\frac{W_{\text{Li}}}{W_{\text{Be}}} = \frac{3 m_p + 4 m_n - m_{\text{Li}}}{4 m_p + 3 m_n - m_{\text{Be}}}.$$

Масса протона  $m_p = 1,00728$  а.е.м. Масса нейтрона  $m_n = 1,00867$  а.е.м.

В таблицах обычно приводят массы нейтральных атомов, поэтому для нахождения масс ядер  $^7_3\text{Li}$  и  $^7_4\text{Be}$  вычитаем из массы атома суммарную массу электронов (см. в прил. табл. П.11 и П.13):

$$m_{\text{Li}} = 7,01601 - 3 \cdot 0,00055 = 7,01436 \text{ а.е.м.};$$

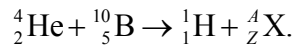
$$m_{\text{Be}} = 7,01693 - 4 \cdot 0,00055 = 7,01473 \text{ а.е.м.};$$

$$\frac{W_{\text{Li}}}{W_{\text{Be}}} = \frac{3 \cdot 1,00728 + 4 \cdot 1,00867 - 7,01436}{4 \cdot 1,00728 + 3 \cdot 1,00867 - 7,01473} = \frac{0,04216}{0,04040} = 1,0436.$$

**№ 3.** При соударении  $\alpha$ -частицы с ядром бора  $^{10}_5\text{B}$  произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одно из них – ядро атома водорода  $^1_1\text{H}$ . Определите порядковый номер и массовое число второго ядра, запишите ядерную реакцию и определите ее энергетический эффект.

**Р е ш е н и е.**

Обозначим неизвестное ядро символом  $^A_Z\text{X}$ . Поскольку  $\alpha$ -частица представляет собой ядро гелия  $^4_2\text{He}$ , то запись реакции имеет вид



Применив закон сохранения массовых чисел, получим уравнение  $4 + 10 = 1 + A$ , откуда  $A = 13$ . Применив закон сохранения заряда, получим уравнение  $2 + 5 = 1 + Z$ , откуда  $Z = 6$ .

Следовательно, неизвестное ядро является ядром изотопа атома углерода  $^{13}_6\text{C}$ .

Энергетический эффект  $Q$  ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = 931 \cdot [(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}) - (m_{\text{H}} + m_{\text{C}})].$$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых скобках – массы ядер продуктов реакции. При числовых подсчетах по этой формуле массы ядер заменяют массами нейтральных атомов. Возможность такой замены вытекает из следующих соображений.

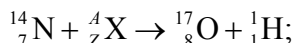
Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома равно его зарядовому числу  $Z$ . Сумма зарядовых чисел исходных ядер равна сумме зарядовых чисел ядер продуктов реакции. Следовательно, электронные оболочки ядер гелия и бора содержат вместе столько же электронов, сколько их содержат электронные оболочки ядер углерода и водорода. Очевидно, что при вычитании суммы

масс нейтральных атомов углерода и водорода из суммы масс атомов гелия и бора массы электронов выпадут, и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер. Подставив массы атомов, взятые из табл. П.13 в прил., в расчетную формулу, получим:

$$Q = 931 [(4,00260+10,01294) - (1,00783+13,00335)] = 4,06 \text{ МэВ.}$$

**№ 4.** Какая частица участвует в осуществлении ядерной реакции:  ${}^{14}_7\text{N} + X \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ ?

**Р е ш е н и е.** При любой ядерной реакции выполняются законы сохранения зарядового  $Z$  и массового  $A$  чисел:



$$14 + A = 17 + 1, \text{ отсюда } A = 4; 7 + Z = 8 + 1, \text{ отсюда } Z = 2.$$

Следовательно, неизвестной является  $\alpha$ -частица ( ${}^4_2\text{He}$ ).

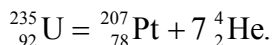
**№ 5.** Сколько  $\alpha$ - и  $\beta^-$ -распадов должно произойти, чтобы уран  ${}^{235}_{92}\text{U}$  превратился в стабильный изотоп свинца  ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ ?

**Р е ш е н и е.** Схема  $\alpha$ -распада  ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^4_2\text{He}$ , схема  $\beta^-$ -распада  ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y} + {}^0_{-1}e$ .

Для получения нужного массового числа ядра-продукта необходимо следующее число реакций  $\alpha$ -распада:

$$N_\alpha = \frac{A_U - A_{\text{Pb}}}{4} = \frac{235 - 207}{4} = 7.$$

После 7 реакций  $\alpha$ -распада получаем платину:



При  $\beta^-$ -распаде увеличивается на 1 зарядовое число ядра-продукта, а массовое остается неизменным. Необходимое число  $\beta^-$ -распадов для получения нужного зарядового числа

$$N_\beta = Z_{\text{Pb}} - Z_{\text{Pt}} = 82 - 78 = 4 \Rightarrow {}^{207}_{78}\text{Pt} = {}^{207}_{82}\text{Pb} + 4 {}^0_{-1}e.$$

Окончательно получим:  ${}^{235}_{92}\text{U} = {}^{207}_{82}\text{Pb} + 7 {}^4_2\text{He} + 4 {}^0_{-1}e$ .

## 5.5. Элементы космологии

*Космология* – это учение о Вселенной. Предметом космологии является изучение истории Вселенной, ее строения и эволюции.

Космология тесно связана с *общей теорией относительности*, так как во Вселенной приходится иметь дело с большими расстояниями, высокими скоростями и огромными массами. Основная трудность состоит в том, что в лаборатории нельзя провести детальный контролируемый космологический эксперимент – приходится изучать объекты, которые находятся на фантастических расстояниях от нас и на которые мы никак не можем влиять. Выводы космологии основываются на законах физики, данных астрономии, философских принципах. Важнейшим философским постулатом является положение, согласно которому законы физики (природы), установленные (чаще всего) на основе опытов на планете Земля, могут быть экстраполированы на всю Вселенную.

Эйнштейн показал, что общая теория относительности может объяснить существование *статической* Вселенной, т.е. Вселенной, которая не изменяется со временем (идея Аристотеля о вечной неизменяющейся Вселенной). В то время казалось, что Вселенная статическая, и этот результат получил всеобщее признание. Однако в 1923 г. советским ученым А.А. Фридманом была создана теория расширяющейся Вселенной, а в 1929 г. Э. Хаббл обнаружил, что в космосе «все разбегается», Вселенная расширяется. По современным представлениям, галактики разбегаются со скоростями, пропорциональными расстояниям до них.

Предположение об образовании Вселенной в результате гигантского взрыва (*теория большого взрыва*) было впервые высказано Г. Гамовым в 1948 г. Согласно этой теории, примерно  $10^{10}$  лет назад (спустя всего одну сотую секунды после «начала») все вещество и вся энергия современной Вселенной были сконцентрированы в одном сгустке с плотностью свыше  $10^{25}$  г/см<sup>3</sup> (в триллионы раз выше плотности воды) и температурой свыше  $10^{16}$  К. В этих условиях не могли существовать ни ядра, ни тем более атомы. Чудовищное радиационное давление внутри сгустка привело к его необычайно быстрому расширению – большому взрыву. Через несколько минут расширение Вселенной и ее охлаждение достигли такой степени, что стало возможным образование ядер. Пространство было заполнено облаком из раскаленных газов и ослепляющим светом. Свет, излученный первоначальным газовым облаком, все еще «бродит» во Вселенной. Претерпев сильные изменения, он сейчас заметен в виде микроволнового фона – *реликтового излучения*.

Все элементы Вселенной образовались в результате ядерных реакций в первые моменты после большого взрыва. Через миллиард лет началось образование галактик, звезд и стабильного вещества в современном виде. Звезды не рассеяны во вселенной равномерно, а сгруппированы в отдельные «острова» – галактики. Каждая галактика включает в себя в среднем более 100 млрд звезд, а также межзвездный газ и межзвездную пыль. Галактики обычно имеют форму спирали или эллипса. Диаметр их может достигать  $10^5$  световых лет. Млечный Путь представляет собой одну такую галактику, ту самую Галактику, которая включает в себя (в качестве незначительной периферийной звезды) и наше *Солнце*.

В настоящее время Вселенная расширяется, но будет ли это расширение продолжаться бесконечно, так что в пределе плотность вещества во Вселенной станет бесконечно малой? Общая теория относительности дает определенный ответ на этот вопрос. Согласно этой теории, существует некоторая *критическая масса* Вселенной. Если действительная масса Вселенной меньше критической, гравитационного притяжения вещества во Вселенной будет недостаточно, чтобы остановить расширение, и оно будет продолжаться бесконечно. С другой стороны, если действительная масса Вселенной *превосходит* критическую, гравитационное притяжение, в конечном счете, замедлит расширение, приостановит его и затем приведет к сжатию. В этом случае Вселенную ожидает коллапс, в результате которого вновь образуется сгусток. Все будет готово для нового большого взрыва и нового расширения. Таким образом, Вселенная должна *пульсировать* между состояниями максимального расширения и коллапса.

Содержит ли Вселенная достаточную массу (в форме вещества и энергии) для того, чтобы стала возможной ее пульсация? Приблизительное количество вещества в звездах, галактических пыли и газе можно оценить различными способами. Можно оценить также энергию излучения звезд, магнитных полей в космическом пространстве, движения облаков газа, космических лучей и нейтрино. Все это, вместе взятое, оказывается меньше критической массы. В вычислениях существует, однако, большая неопределенность, поскольку мы не знаем количества вещества в *межгалактическом* пространстве.

Мы не знаем сколько-нибудь точно массу или размеры Вселенной. Мы не знаем, будет ли наблюдаемое расширение Вселенной продолжаться бесконечно или, в конце концов, прекратится и сме-



нится сжатием. Мы не знаем, существует ли во Вселенной в каких-либо значительных количествах антивещество. Существуют ли антигалактики? Мы не знаем природы квазаров, излучающих гигантскую энергию. Мы знаем слишком мало о деталях эволюции звезд. Мы очень мало знаем о происхождении Вселенной, хотя имеющиеся данные указывают на то, что ее расширение – это результат происшедшего около 10 миллиардов лет назад чудовищного взрыва, мощь которого невозможно себе представить. Но откуда взялось это гигантское количество изначальной энергии?

## **ЧАСТЬ II. КОНТРОЛЬНЫЕ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ**

### **1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

Методика изучения физики на заочном отделении в корне отличается от методик для дневной формы обучения. Так, если на дневном отделении основной формой обучения являются лекции, практические и лабораторные занятия, где преподаватель излагает программный материал, решает со студентами задачи, проводит лабораторные занятия, проверяет знания студентов, то учебный процесс на заочном отделении связан с углубленной самостоятельной работой и предусматривает:

- 1) изучение материала по учебникам или учебным пособиям;
- 2) самостоятельное решение задач;
- 3) выполнение контрольных работ;
- 4) выполнение лабораторных работ;
- 5) сдачу зачетов и экзаменов.

Для успешного овладения материалом и сдачи экзаменов по физике необходимо руководствоваться несколькими правилами:

1. Следует изучать курс систематически в течение всего учебного года. Попытка изучить физику в сжатые сроки перед экзаменом не даст глубоких, прочных знаний и приведет к неудаче.

2. Выбрав какое-либо учебное пособие в качестве основного для определенной части курса, придерживайтесь данного пособия при изучении всей части или, по крайней мере, ее целого раздела. Замена одного пособия другим в процессе изучения может привести к утрате логической связи между отдельными вопросами. Но если выбранное пособие не дает полного или ясного ответа на некоторые вопросы программы, необходимо обращаться к другим учебным пособиям.

3. При чтении учебного пособия составляйте конспект, в котором записывайте законы и формулы, выражающие эти законы, определения физических величин и их единиц, делайте чертежи и решайте типовые задачи. При решении задач следует пользоваться Международной системой единиц (СИ).

4. Самостоятельную работу над курсом необходимо подвергать систематическому контролю. Для этого после изучения очередного раздела следует ставить вопросы и отвечать на них. При этом надо использовать рабочую программу курса.

5. Очень полезно прослушать установочный курс лекций, организуемых для студентов-заочников, а также пользоваться очными консультациями преподавателей.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Изучение курса физики предусматривает выполнение контрольных работ по всем темам. *Контрольные работы* выполняются по вариантам, включающим ряд задач. Перед выполнением контрольной работы следует повторить соответствующий теоретический материал и рассмотреть примеры решения задач, приведенные после него. При решении задач используйте справочные данные, помещенные в приложении.

В основу каждой физической задачи положен тот или иной частный случай проявления общих законов физики, поэтому без твердого знания теории нельзя рассчитывать на успешное решение даже самых простых задач.

При решении задач необходимо:

1) хорошо вникнуть в условие задачи и установить, какие физические закономерности лежат в ее основе;

2) записать все данные в задаче физические величины в одной системе единиц (в СИ);

3) если позволяет характер задачи, обязательно сделать чертеж, поясняющий ее сущность;

4) записать законы и формулы, на которых базируется решение, и дать словесную формулировку этих законов, разъяснить буквенные обозначения;

5) если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физической закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести;

6) обращать особое внимание на векторный характер многих физических величин. Для полного определения таких величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление;

7) получить решение задачи в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. Правильность решения задачи в общем виде можно проверить, используя правило размерностей (наименований). При правильном решении размерность правой части формулы совпадает с размерностью искомой величины. Несоблюдение этого

условия (оно необходимо, но недостаточно) свидетельствует об ошибке, допущенной в ходе решения;

8) сопровождать решение задачи краткими, но исчерпывающими пояснениями;

9) подставить числовые данные в полученные для искомым величин формулы, произвести с ними необходимые действия; проанализировать результат (оценить его правдоподобность);

10) проводя арифметические расчеты, использовать правила приближенных вычислений, позволяющие экономить время без ущерба для точности. Точность ответа не должна превышать точности, с которой даны исходные величины. В тех задачах, где требуется начертить график, следует рационально выбрать масштаб и начало координат.

При оформлении контрольных работ нужно помнить следующее:

1) контрольные работы для проверки оформляются в обычной ученической тетради синими или черными чернилами;

2) текст задачи из контрольного задания должен быть переписан полностью и выписаны столбиком значения величин с их стандартными обозначениями и размерностями; размерности указываются в СИ;

3) при решении задач необходимо придерживаться правил, приведенных выше;

4) при решении качественных задач следует давать не односложный, а исчерпывающий ответ, основанный на физических законах.

*Лабораторные работы* являются неотъемлемой частью изучения курса физики. При их выполнении студент воспроизводит некоторые физические явления, учится обращению с основными физическими приборами, осваивает методы измерений, приобретает навыки ведения лабораторного журнала, построения графиков, оценки достоверности полученных результатов и оформления отчета.

Основной формой подготовки к лабораторной работе является самостоятельная работа студента: повторение теоретических сведений (раздел указан в начале работы) и ответы на контрольные вопросы, помещенные в конце работы.

Лабораторная работа считается сданной, если проведены все измерения, вычислена искомая величина (с указанием погрешности), оформлен отчет и успешно выполнена защита лабораторной работы.

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

#### Контрольная работа № 1. Механика и молекулярная физика

Примеры решения задач приведены в разделах 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2.

#### Вариант 1

1. Колесо радиусом  $R = 0,1$  м вращается так, что зависимость угла поворота  $\varphi$  (рад) от времени задается уравнением  $\varphi = (1 + 2t + t^3)$ . Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите нормальное, тангенциальное и полное ускорения через 2 с после начала вращения.

2. Найдите силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением  $1 \text{ м/с}^2$ . Угол наклона горы  $30^\circ$ . Масса автомобиля 10 т. Коэффициент трения равен 0,1.

3. Тело массой 2 кг движется со скоростью 3 м/с и сталкивается абсолютно неупруго с телом массой 3 кг, движущимся со скоростью 1 м/с. Определите скорости тел после удара и количество выделившегося при ударе тепла, если тела движутся навстречу друг другу.

4. К ободу однородного диска радиусом 0,2 м и массой 200 кг приложена постоянная касательная сила  $F = 100$  Н. При вращении на диск действует момент сил трения  $M_{\text{тр}} = 4$  Н·м. Определите угловое ускорение, с которым вращается диск.

5. Какую работу совершит человек, переходя от края платформы к ее центру, если платформа (диск) имеет массу 100 кг и вращается, делая  $v = 15$  об/мин, а человек (точечная масса) имеет массу 60 кг? Радиус платформы 2 м.

6. Уравнение движения точки задано в виде  $x = \sin(\pi t/6)$ , где координата  $x$  измеряется в сантиметрах. Найдите моменты времени, в которые достигается максимальная скорость и максимальное ускорение.

7. Диск радиусом 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска. Определите период  $T$  колебаний такого физического маятника.

8. Поперечная волна распространяется вдоль оси  $X$ . Уравнение колебаний источника имеет вид  $y = 4 \cdot \sin 600\pi t$ , где координата  $y$  из-

меряется в сантиметрах. Найдите смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 75 см от источника колебаний, через 0,01 с после начала колебаний. Скорость волны 300 м/с.

9. Сколько атомов содержится в ртути: 1) количеством вещества  $\nu = 0,2$  моль; 2) массой  $m = 1$  г?

10. В баллоне объемом  $V = 10$  л находится гелий под давлением  $p_1 = 1$  МПа при температуре  $T_1 = 300$  К. После того, как из баллона был израсходован гелий массой  $m = 10$  г, температура в баллоне понизилась до  $T_2 = 290$  К. Определите давление  $p_2$  гелия, оставшегося в баллоне.

11. Найдите кинетическую энергию теплового движения молекул, находящихся в 1 г воздуха, при температуре 15 °С. Воздух считать двухатомным газом, имеющим молярную массу 0,029 кг/моль.

12. Азот массой  $m = 5$  кг, нагретый на  $\Delta T = 150$  К, сохранил неизменный объем  $V$ . Найдите: 1) количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу; 2) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии; 3) совершенную газом работу.

13. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндре двигателя внутреннего сгорания давление изменяется от 0,1 до 3,5 МПа. Начальная температура воздуха  $t_1 = 40$  °С. Найдите температуру воздуха в конце сжатия.

14. Нагреватель тепловой машины, работающей по циклу Карно, имеет температуру  $t_1 = 200$  °С. Определите температуру охладителя, если при получении от нагревателя количества теплоты  $Q_n = 1$  Дж машина совершает работу  $A = 0,4$  Дж.

15. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии при изобарном расширении гелия массой  $m = 8$  г от объема  $V_1 = 10$  л до объема  $V_2 = 25$  л.

## Вариант 2

1. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равномерно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до его полной остановки?

2. На автомобиль массой 1 т во время движения действует сила трения, равная 0,1 его силы тяжести. Найдите силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

3. Груз массой 25 кг висит на шнуре длиной 2,5 м. На какую наибольшую высоту можно отвести в сторону груз, чтобы при дальнейших свободных качаниях шнур не оборвался? Прочность шнура на разрыв 550 Н.

4. К ободу однородного диска радиусом 0,2 м приложена постоянная касательная сила  $F = 10$  Н. При вращении на диск действует момент сил трения  $M_{\text{тр}} = 0,5$  Н·м. Угловое ускорение, с которым вращается диск,  $\varepsilon = 10$  рад/с<sup>2</sup>. Определите массу диска.

5. Горизонтальная платформа (диск) массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 0,2 об/с. Человек (точечная масса) массой 60 кг стоит в центре платформы. Сколько оборотов в секунду будет делать платформа, если расстояние от человека до центра станет равным  $R/4$ ?

6. Напишите уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки 49,3 см/с<sup>2</sup>, период колебаний 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 25 мм.

7. Обруч диаметром 56,5 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найдите период этих колебаний.

8. Поперечная волна распространяется вдоль оси  $X$ . Уравнение незатухающих колебаний источника имеет вид  $y = 10 \cdot \sin 0,5 \cdot \pi t$ , где координата  $y$  измеряется в сантиметрах. Напишите уравнение колебаний для точки, отстоящей на расстоянии 600 м от источника колебаний, если скорость волны 300 м/с.

9. Вода при температуре  $t = 4$  °С занимает объем  $V = 1$  см<sup>3</sup>. Определите количество вещества  $\nu$  и число молекул воды.

10. В баллоне емкостью  $V = 2,0$  л находится аргон под давлением  $p_1 = 800$  кПа при температуре  $T_1 = 325$  К. Когда из баллона было взято некоторое количество аргона, давление в баллоне понизилось до  $p_2 = 600$  кПа, а температура установилась  $T_2 = 300$  К. Определите массу аргона, взятого из баллона.

11. Чему равна энергия вращательного движения молекул, содержащихся в 1 кг азота, при температуре 7 °С?

12. Водород занимает объем  $V_1 = 10$  м<sup>3</sup> при давлении  $p_1 = 100$  кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления  $p_2 = 300$  кПа. Определите: 1) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа; 2) работу  $A$ , совершаемую газом; 3) количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.



13. Кислород, занимавший объем  $V_1 = 1$  л под давлением  $p_1 = 1,2$  МПа, адиабатно расширился до объема  $V_2 = 10$  л. Определите работу расширения газа.

14. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу  $A = 2,94$  кДж и отдает за один цикл холодильнику количество теплоты  $Q_x = 13,4$  кДж. Найдите КПД цикла.

15. Нагретый до  $T_1 = 880$  К кусок железа массой 2 кг бросают в большое озеро, температура в котором  $T_2 = 280$  К. Определите изменение энтропии куска железа.

### Вариант 3

1. Какова была скорость тела в начальный момент времени, если, двигаясь с постоянным ускорением  $2$  м/с<sup>2</sup>, за 3 с тело прошло путь 60 м?

2. В лифте, опускающемся с ускорением  $3$  м/с<sup>2</sup>, находится человек массой 60 кг. Найдите вес человека.

3. Молот массой  $m_1 = 200$  кг падает на поковку, масса которой вместе с наковальной  $m_2 = 2500$  кг. Скорость молота в момент удара равна 2 м/с. Найдите энергию, затраченную на сотрясение (движение) фундамента. Удар молота о поковку считать неупругим.

4. К ободу однородного диска радиусом 0,8 м и массой 10 кг приложена постоянная касательная сила  $F$ . При вращении на диск действует момент сил трения  $M_{тр} = 8$  Н·м. Угловое ускорение, с которым вращается диск,  $\varepsilon = 5$  рад/с<sup>2</sup>. Определите силу  $F$ .

5. Диск массой 1 кг и диаметром 50 см вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно его плоскости, делая 20 об/с. Какую работу надо совершить, чтобы остановить диск?

6. Амплитуда гармонических колебаний 5 см, период 4 с. Найдите максимальную скорость колеблющейся точки и максимальное ускорение.

7. Диск радиусом 75 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии 50 см от оси диска перпендикулярно к плоскости диска. Определите частоту  $\nu$  колебаний такого физического маятника.

8. От источника колебаний распространяются волны вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний 5 см. Каково смещение точки, уда-

ленной от источника на  $3/4$  длины волны, в момент, когда от начала колебаний источника прошло время, равное  $0,5$  периода колебаний?

9. Сколько молекул газа содержится в баллоне емкостью  $V = 30$  л при температуре  $T = 300$  К и давлении  $p = 5$  МПа?

10. Баллон емкостью  $V = 40$  л заполнен азотом, температура которого  $T = 300$  К. Когда часть азота израсходовали, давление в баллоне понизилось на  $\Delta p = 400$  кПа. Определите массу  $\Delta m$  израсходованного азота. Процесс считать изотермическим.

11. Двухатомный газ массой  $m = 1$  кг находится под давлением  $p = 80$  кПа и имеет плотность  $\rho = 4$  кг/м<sup>3</sup>. Найдите энергию теплового движения  $W$  молекул газа при этих условиях.

12. При изохорном нагревании кислорода объемом  $V = 50$  л давление газа изменилось на  $\Delta p = 0,5$  МПа. Найдите количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.

13. Азот массой  $m = 1$  кг занимает при температуре  $T_1 = 300$  К объем  $V_1 = 0,5$  м<sup>3</sup>. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите конечный объем газа.

14. В идеальном тепловом двигателе абсолютная температура нагревателя в 3 раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 60 кДж теплоты. Какую работу при этом совершил газ?

15. В теплоизолированный сосуд, содержащий 2 кг льда при температуре  $0$  °С, залили 1 кг воды при  $100$  °С. Определите равновесную температуру системы и изменение энтропии системы в результате теплообмена.

#### Вариант 4

1. По дуге окружности радиусом  $R = 10$  м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равно  $4,9$  м/с<sup>2</sup>. В этот момент времени векторы полного и нормального ускорений образуют угол  $60^\circ$ . Найдите скорость, тангенциальное и полное ускорения точки.

2. Тело массой 100 кг, двигаясь по горизонтальной поверхности с некоторой начальной скоростью, проделало путь до остановки 20 м за 10 с. Найдите силу трения, действующую на тело.

3. Граната, летящая со скоростью 15 м/с, разорвалась на 2 осколка массами 0,6 и 1,4 кг. Скорость большего осколка увеличилась до 24 м/с. Определите скорость и направление движения меньшего осколка.

4. К ободу однородного диска радиусом 0,6 м и массой 2 кг приложена постоянная касательная сила  $F = 15$  Н. При вращении на диск действует момент сил трения  $M_{\text{тр}}$ . Угловое ускорение, с которым вращается диск,  $\varepsilon = 50$  рад/с<sup>2</sup>. Определите  $M_{\text{тр}}$ .

5. Диск массой 1 кг и радиусом 0,2 м вращается с частотой 5 об/с. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить частоту его вращения до 10 об/с?

6. Уравнение движения точки задано в виде  $x = \sin(\pi t/6)$ , где координата  $x$  измеряется в сантиметрах. Найдите моменты времени, в которые достигается максимальная скорость и максимальное ускорение.

7. Обруч диаметром 113 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найдите период этих колебаний.

8. Волны распространяются в упругой среде со скоростью 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы которых противоположны, равно 1 м. Определите частоту колебаний.

9. Определите количество вещества  $\nu$  и число  $N$  молекул кислорода массой  $m = 0,5$  кг.

10. Под каким давлением находится углекислый газ в баллоне огнетушителя емкостью 2 дм<sup>3</sup>, если пустой баллон имел массу 4,2 кг, а после заполнения 5,6 кг? Температура баллона 37 °С.

11. Найдите кинетическую энергию теплового поступательного движения молекул, находящихся в 1 г воздуха, при температуре 15 °С. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого равна 0,029 кг/моль.

12. Кислород при неизменном давлении  $p = 80$  кПа нагревается. Его объем увеличивается от  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup> до  $V_2 = 3$  м<sup>3</sup>. Определите: 1) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии кислорода; 2) работу  $A$ , совершенную им при расширении; 3) количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.

13. Азот массой  $m = 1$  кг занимает при температуре  $T_1 = 300$  К объем  $V_1 = 0,5$  м<sup>3</sup>. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите конечную температуру газа.

14. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты  $Q_H = 6,28$  кДж. Найдите КПД цикла и работу  $A$ , совершаемую за один цикл.

15. Объем  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup> воздуха, находящегося при температуре  $t_1 = 0$  °С и давлении  $p_1 = 100$  кПа, изотермически расширяется в 2 раза. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии при этом процессе.

### Вариант 5

1. Камень брошен под углом  $30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью 10 м/с. Через какое время камень будет на высоте 1 м?

2. Тело массой 10 кг находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $30^\circ$ . Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu = 0,6$ . Какую силу нужно приложить к телу, чтобы двигать его вверх с ускорением  $2$  м/с<sup>2</sup>?

3. Тяжелый шарик, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити, имеющей длину 1 м, отклоняют от вертикали на угол  $60^\circ$  и отпускают. Какую максимальную скорость приобретет шарик?

4. На вал массой  $m_1 = 20$  кг, который может вращаться вокруг своей оси, намотана нить. К концу нити привязан груз массой  $m_2 = 10$  кг. Определите расстояние, пройденное грузом за первые 2 с его движения.

5. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 0,5 об/с. Человек массой 60 кг стоит на расстоянии 3 м от центра платформы. Когда человек переместился на расстояние 1 м от центра платформы, частота вращения стала равной 0,97 об/с. Платформа – однородный диск, человек – точечная масса. Найдите работу, совершаемую человеком.

6. Материальная точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид  $x = 20 \cos(\pi t/6)$ , где координата  $x$  измеряется в миллиметрах. Какова скорость точки в момент времени  $t = 3$  с?

7. Из однородного диска радиусом  $R$  сделали физический маятник. Вначале ось проходит через образующую диска, потом на рас-

стоянии  $R/2$  от центра диска. Определите соотношение периодов колебаний диска.

8. Найдите смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии  $\ell = \lambda/6$  ( $\lambda$  – длина волны) для момента времени  $T/3$  с ( $T$  – период колебаний). Амплитуда колебаний равна  $0,3$  м.

9. Найдите молярную массу  $\mu$  и массу  $m_{\text{мол}}$  одной молекулы поваренной соли NaCl.

10. При уменьшении объема газа в 2 раза давление увеличилось на 120 кПа, а абсолютная температура возросла на 10 %. Каким было первоначальное давление?

11. Найдите внутреннюю энергию  $U$  20 г кислорода при температуре  $t = 10$  °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть – на долю вращательного движения?

12. Азот нагревался при постоянном давлении, при этом ему было сообщено количество теплоты  $Q = 21$  кДж. Определите работу  $A$ , которую совершил газ, и изменение  $\Delta U$  его внутренней энергии.

13. Азот массой  $m = 1$  кг занимает при температуре  $T_1 = 300$  К объем  $V_1 = 0,5$  м<sup>3</sup>. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите изменение внутренней энергии газа.

14. Работа, совершенная газом за цикл в идеальной тепловой машине, в 4 раза меньше теплоты, отданной газом. Каково отношение абсолютной температуры нагревателя к абсолютной температуре холодильника?

15. При нагревании 1 кмоль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается в 1,5 раза. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии, если нагревание происходит изобарно.

### Вариант 6

1. Уравнение движения задано выражением  $x = \frac{1}{3}t^3$ , где координата  $x$  измеряется в метрах. Определите: а) ускорение в момент времени  $t = 5$  с; б) среднее ускорение за первые 5 с движения.

2. Два бруска с массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг, связанные нитью, двига-

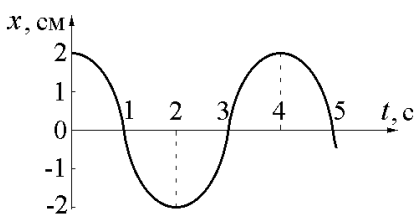


ются по гладкой поверхности стола под действием горизонтальной силы  $F = 15$  Н, приложенной ко второму бруску. Определите силу натяжения нити.

3. Шар массой 1 кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и отскакивает от нее. Скорость шара до удара о стенку  $v_1 = 10$  см/с, после удара  $v_2 = 8$  см/с. Найдите количество тепла  $Q$ , выделившееся при ударе.

4. Маховик в виде диска массой  $m = 50$  кг и радиусом  $r = 20$  см был раскручен до частоты вращения  $\nu = 480$  об/мин. Вследствие трения маховик остановился, сделав 200 оборотов. Найдите момент сил трения. Силы трения считать постоянными величинами.

5. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с угловой скоростью 22 рад/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом в центре платформы. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек перейдет из центра платформы к ее краю? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой.



6. Зависимость координаты колеблющегося тела от времени представлена на рисунке. Напишите в СИ уравнение гармонических колебаний в виде  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

7. Диск радиусом 48 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска перпендикулярно к плоскости диска. Определите частоту колебаний такого физического маятника.

8. Волны с периодом 0,6 с и амплитудой 5 см распространяются со скоростью 20 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии 40 м от источника волн в тот момент, когда от начала колебаний прошло 2 с?

9. Определите массу  $m_{\text{мол}}$  одной молекулы углекислого газа.

10. Газ массой  $m = 12$  г занимает объем  $V = 4$  л при температуре  $t_1 = 7$  °С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность  $\rho$  стала равной  $0,6$  кг/м<sup>3</sup>. До какой температуры был нагрет газ?

11. Чему равна энергия теплового движения молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом 2 л и находящегося под давлением 150 кПа?

12. Идеальный газ получил количество теплоты 300 Дж, при этом внешние силы совершили над ним работу 100 Дж. Как изменилась внутренняя энергия газа?

13. Двухатомный идеальный газ занимает объем  $V_1 = 1$  л и находится под давлением  $p_1 = 0,1$  МПа. После адиабатного расширения газ характеризуется объемом  $V_2$  и давлением  $p_2$ . В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление  $p_3 = 0,2$  МПа. Определите объем  $V_2$ .

14. Температура нагревателя идеальной тепловой машины 127 °С, а холодильника 27 °С. Количество теплоты, получаемое от нагревателя за 1 с, равно 60 кДж. Вычислите количество теплоты, отдаваемое холодильнику за 10 с.

15. При нагревании 1 кмоль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается в 1,5 раза. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии, если нагревание происходит изохорно.

### Вариант 7

1. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$ . Определите полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны  $R = 3$  м, если точка движется на этом участке со скоростью 2 м/с.

2. Два груза массами 6 и 4 кг соединены шнуром, перекинутым через блок. Масса шнура и масса блока много меньше массы грузов. Трения в блоке нет. Определите ускорение грузов.

3. Снаряд массой 20 кг, летевший горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в платформу с песком массой 10 т и застревает в песке. С какой скоростью стала двигаться платформа от толчка?

4. Под действием постоянного момента силы 12 Н·м вращающееся тело в течение 3 с изменило угловую скорость от 10 до 28 рад/с. Чему равен момент инерции этого тела?

5. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 0,5 об/с. Человек массой 60 кг стоит на расстоянии 1 м от центра

платформы. Когда человек переместился на расстояние 3 м от центра платформы, частота вращения стала равной 0,26 об/с. Платформа – однородный диск, человек – точечная масса. Найдите работу, совершаемую человеком.

6. Уравнение гармонических колебаний имеет вид  $x = \cos 5\pi t$ , где координата  $x$  измеряется в сантиметрах. Определите амплитуду, циклическую частоту, период и начальную фазу этих колебаний.

7. Найдите приведенную длину физического маятника, период колебаний которого равен 0,5 с.

8. Волны с частотой 1 Гц и амплитудой колебаний 2 см распространяются со скоростью 30 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии 30 м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло 4 с?

9. Определите концентрацию  $n$  молекул кислорода, находящегося в сосуде вместимостью  $V = 2$  л. Количество вещества  $\nu$  кислорода равно 0,2 моль.

10. Бутылка, наполненная газом, плотно закрыта пробкой площадью сечения  $2,5 \text{ см}^2$ . До какой температуры надо нагреть газ, чтобы пробка вылетела из бутылки, если сила трения, удерживающая пробку, равна 12,5 Н? Первоначальное давление газа в бутылке и наружное давление одинаковы и равны 100 кПа, а начальная температура 270 К.

11. Давление  $p$  газа равно 1 МПа, концентрация  $n$  его молекул равна  $10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Определите: 1) температуру  $T$  газа; 2) среднюю кинетическую энергию  $\langle \epsilon_{\text{к. пост. мол}} \rangle$  поступательного движения молекул газа.

12. Для повышения температуры газа, имеющего массу 20 кг и молярную массу 0,028 кг/моль, на 50 К при постоянном давлении необходимо затратить количество теплоты 1 МДж. Какое количество теплоты следует отнять от этого газа при постоянном объеме, чтобы его температура понизилась на 50 К?

13. Двухатомный идеальный газ занимает объем  $V_1 = 1$  л и находится под давлением  $p_1 = 0,1$  МПа. После адиабатного расширения газ характеризуется объемом  $V_2$  и давлением  $p_2$ . В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление  $p_3 = 0,2$  МПа. Определите давление  $p_2$ .



14. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу  $7,35 \cdot 10^4$  Дж. Температура нагревателя  $100^\circ\text{C}$ , температура холодильника  $0^\circ\text{C}$ . Найдите: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя; 3) количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

15. Кислород массой  $m = 10$  г нагревается от температуры  $T_1 = 323$  К до температуры  $T_2 = 423$  К. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии, если нагревание происходит изобарно.

### Вариант 8

1. Шарик, скатываясь с наклонной плоскости, за первую секунду прошел путь, равный 10 см. Чему равен путь, пройденный шариком за четвертую секунду? Начальная скорость шарика равна нулю.

2. Груз массой 100 кг равноускоренно поднимают по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $30^\circ$ . Коэффициент трения  $\mu = 0,2$ . Длина наклонной плоскости 2 м, время подъема 4 с. Определите силу тяги.

3. Какую работу совершил мальчик, стоящий на гладком льду, сообщив санкам скорость 4 м/с относительно льда, если масса санок 4 кг, а масса мальчика 20 кг?

4. Маховик, массу которого  $m = 5$  кг можно считать равномерно распределенной по ободу радиусом 20 см, вращается с частотой  $\nu = 720$  мин<sup>-1</sup>. При торможении маховик останавливается через 20 с. Определите тормозящий момент. Силы трения во время торможения считать постоянными.

5. Горизонтальная платформа массой 200 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 0,5 об/с. Человек массой 60 кг стоит на расстоянии  $R/2$  ( $R$  измеряется в метрах) от центра платформы. Сколько оборотов в секунду будет делать платформа, если расстояние от человека до центра станет равным  $R$ ? Платформа – однородный диск радиусом  $R$ , человек – точечная масса.

6. Уравнение гармонических колебаний тела имеет вид  $x = 0,2 \cdot \sin 5\pi t$ , где координата  $x$  измеряется в сантиметрах. Каково максимальное ускорение этого тела?

7. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча 30 см. Вычислите период  $T$  его колебаний.

8. Волны с периодом 1,2 с и амплитудой 3 см распространяются со скоростью 15 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии 30 м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний прошло 3 с?

9. Определите количество молей вещества  $\nu$  и число  $N$  молекул азота массой  $m = 0,2$  кг.

10. Азот массой  $m = 5$  г, находящийся в закрытом сосуде объемом  $V = 4$  л при температуре  $20^\circ\text{C}$ , нагревают до температуры  $40^\circ\text{C}$ . Найдите давления газа до и после нагревания.

11. Баллон содержит водород массой 10 г при температуре  $7^\circ\text{C}$ . Определите суммарную кинетическую энергию  $W_{\text{к.пост}}$  поступательного движения и полную кинетическую энергию  $W$  всех молекул газа.

12. На нагревание кислорода массой  $m = 160$  г на  $\Delta T = 12$  К было затрачено количество теплоты  $Q = 1,76$  кДж. Как протекал процесс: при постоянном объеме или при постоянном давлении?

13. Кислород, занимающий при давлении  $p_1 = 1$  МПа объем  $V_1 = 5$  л, адиабатно расширяется в 3 раза. Определите работу расширения газа.

14. Совершая цикл Карно, газ получил от нагревателя теплоту  $Q_{\text{н}} = 1$  кДж и совершил работу  $A = 200$  Дж. Температура нагревателя  $T_{\text{н}} = 375$  К. Определите температуру холодильника.

15. Кислород массой  $m = 10$  г нагревается от температуры  $T_1 = 323$  К до температуры  $T_2 = 423$  К. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии, если нагревание происходит изохорно.

### Вариант 9

1. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением  $0,7$  м/с<sup>2</sup>. Определите полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны  $R = 4$  м, если точка движется на этом участке с линейной скоростью 3 м/с.

2. На наклонной плоскости длиной 13 м и высотой 5 м лежит груз массой 26 кг. Коэффициент трения равен 0,5. Какую силу надо приложить к грузу вдоль плоскости, чтобы втащить груз?

3. Для того чтобы сообщить телу скорость 2 м/с, необходимо совершить работу 10 Дж. Какую следует совершить работу, чтобы увеличить скорость еще на 2 м/с?

4. К ободу колеса, имеющего форму диска радиусом 0,5 м и массой 60 кг, приложена касательная сила 100 Н. Найдите: 1) угловое ускорение колеса; 2) через какое время после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения 100 об/с.

5. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью  $\omega_1 = 1,5$  рад/с, падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью  $\omega_2 = 1$  рад/с. Оба диска при ударе сцепляются друг с другом. Определите, какова будет угловая скорость вращения дисков после удара. Моменты инерции дисков относительно оси вращения  $I_1 = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_2 = 0,3$  кг·м<sup>2</sup>.

6. Напишите уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки 98,6 см/с<sup>2</sup>, период колебаний 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 25 мм.

7. Однородный стержень совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Длина стержня  $\ell = 1$  м. Определите период колебаний стержня и его приведенную длину.

8. От источника колебаний распространяются волны вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний 10 см. Каково смещение точки, удаленной от источника на  $1/4$  длины волны, в момент, когда от начала колебаний источника прошло время, равное 1,9 периода колебаний?

9. Определите количество вещества  $\nu$  водорода, заполняющего сосуд объемом  $V = 3$  л, если концентрация молекул в сосуде  $n = 2 \cdot 10^{18}$  м<sup>-3</sup>.

10. При температуре  $t = 50$  °С давление насыщенного водяного пара  $p = 12,3$  кПа. Найдите плотность  $\rho$  водяного пара.

11. Какой энергией теплового движения обладают молекулы двухатомного газа, занимающие при давлении 40 мм рт. ст. и температуре 27 °С объем 10 см<sup>3</sup>?

12. Азот массой  $m = 200$  г расширяется изотермически при температуре  $T = 280$  К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найдите: 1) изменение внутренней энергии  $\Delta U$ ; 2) совершенную

при расширении газа работу  $A$ ; 3) количество теплоты  $Q$ , полученное газом.

13. До какой температуры охладится воздух, находящийся при  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , если он расширяется адиабатически от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 2V_1$ ?

14. Рабочее тело идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, получает от нагревателя с температурой  $273^\circ\text{C}$  количество теплоты  $80\text{ кДж}$ . Роль холодильника играет окружающий воздух, температура которого  $0^\circ\text{C}$ . На какую максимальную высоту эта машина может поднять груз массой  $400\text{ кг}$ ?

15. Азот массой  $m = 10,5\text{ г}$  изотермически расширяется от объема  $V_1 = 2\text{ л}$  до объема  $V_2 = 5\text{ л}$ . Найдите изменение энтропии  $\Delta S$  в этом процессе.

### Вариант 10

1. Уравнение движения точки имеет вид  $x = t^3 + 2$ , где координата  $x$  измеряется в метрах. Определите: а) среднюю скорость в промежутке времени от 2 до 4 с; б) значение скорости в момент времени  $t = 3\text{ с}$ .

2. Тело массой  $100\text{ кг}$  движется по горизонтальной поверхности под действием силы в  $500\text{ Н}$ , составляющей угол  $30^\circ$  с горизонтом. Во время движения на тело действует сила трения; коэффициент трения  $\mu = 0,2$ . Чему равно ускорение тела? Какой путь оно пройдет за  $10\text{ с}$ , двигаясь из состояния покоя?

3. Конькобежец массой  $68\text{ кг}$ , стоящий на коньках на льду, бросает камень массой  $4\text{ кг}$  со скоростью  $5\text{ м/с}$  под углом  $30^\circ$  к горизонту. Какую скорость приобретает конькобежец сразу же после броска?

4. Тонкий однородный стержень длиной  $50\text{ см}$  и массой  $400\text{ г}$  вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 3\text{ рад/с}^2$  около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определите вращающий момент  $M$ .

5. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью  $7,2\text{ км/ч}$ . На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет своей кинетической энергии? Уклон горки  $10\text{ м}$  на каждые  $100\text{ м}$  пути.

6. Амплитуда гармонических колебаний 5 мм, период 0,4 с. Найдите максимальную скорость колеблющейся точки и ее максимальное ускорение.

7. Однородный стержень длиной 1 м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии 10 см от его верхнего конца. Определите частоту колебаний.

8. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура  $T = 1,2$  с, амплитуда 2 см. Определите смещение точки, отстоящей на расстоянии 45 м от источника волн, в момент времени  $t = 4$  с.

9. В баллоне вместимостью  $V = 3$  л содержится кислород массой  $m = 10$  г. Определите концентрацию  $n$  молекул газа.

10. Имеются два сосуда, соединенные трубкой с закрытым краном. В левом сосуде объемом 5 л находится газ под давлением 0,2 МПа, а в правом объемом 7 л находится газ под давлением 0,3 МПа. Какое установится давление в сосудах, если кран открыть? Процесс изотермический.

11. Средняя энергия молекулы одноатомного идеального газа  $0,0608 \cdot 10^{-19}$  Дж. Давление газа 0,2 МПа. Найдите число молекул в одном кубическом метре газа.

12. В цилиндре под поршнем находится азот массой  $m = 0,6$  кг, занимающий объем  $V_1 = 1,2$  м<sup>3</sup> при температуре  $T = 560$  К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объем  $V_2 = 4,2$  м<sup>3</sup>, причем температура осталась неизменной. Найдите: 1) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии; 2) совершенную при расширении газа работу  $A$ ; 3) количество теплоты  $Q$ , полученное газом.

13. Кислород объемом  $V_1 = 7,5$  л адиабатически сжимается до объема  $V_2 = 1$  л, причем в конце сжатия установилось давление  $p_2 = 1,6$  МПа. Под каким давлением  $p_1$  находился газ до сжатия?

14. Нагреватель тепловой машины, работающей по циклу Карно, имеет температуру  $t_1 = 200$  °С. Определите температуру холодильника, если при получении от нагревателя количества теплоты  $Q_{\text{н}} = 1$  Дж машина совершает работу  $A = 0,4$  Дж.

15. Найдите изменение энтропии  $\Delta S$  при изобарном расширении гелия массой  $m = 8$  г от объема  $V_1 = 10$  л до объема  $V_2 = 25$  л.

## Контрольная работа № 2. Электростатика и постоянный ток

Примеры решения задач приведены в разделах 3.1, 3.2.

### Вариант 1

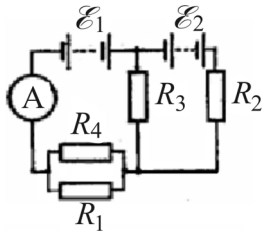
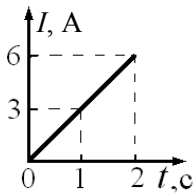
1. Проводящий шарик, несущий заряд  $1,8 \cdot 10^{-8}$  Кл, привели в соприкосновение с такими же двумя шариками, один из которых имел заряд  $-0,3 \cdot 10^{-8}$  Кл, а другой – 0 Кл. Как распределится заряд между ними? С какой силой будут взаимодействовать в вакууме два из них на расстоянии 5 см один от другого?

2. На отрезке тонкого прямого проводника длиной  $\ell = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 3$  мкКл/м. Вычислите напряженность  $E$ , создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

3. Тонкое кольцо радиусом  $R$  заряжено равномерно с линейной плотностью заряда  $\tau$ . Определите потенциал электрического поля в центре кольца.

4. Два последовательно соединенных конденсатора с емкостями  $C_1 = 1$  мкФ и  $C_2 = 2$  мкФ подключены к источнику тока с напряжением  $U = 900$  В. Возможна ли работа такой схемы, если напряжение пробоя конденсаторов  $U_{пр} = 500$  В?

5. В сеть с напряжением 100 В подключили катушку с сопротивлением  $R_1 = 2$  кОм и вольтметр, соединенные последовательно. При этом вольтметр показал, что  $U_1 = 80$  В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал, что  $U_2 = 60$  В. Определите сопротивление  $R_2$  другой катушки.



6. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом нарастает в течение времени  $t = 2$  с по линейному закону от  $I_0 = 0$  до  $I_{\max} = 6$  А. Определите количество теплоты  $Q_1$ , выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и  $Q_2$  – за вторую, а также найдите отношение этих количеств теплоты  $Q_2/Q_1$ .

7. Замкнутая цепь имеет вид, представленный на рисунке. Батареи имеют ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_2$ , сопротивления  $R_1 = R_3 = 20$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом. Через амперметр течет ток  $I = 1,5$  А, направленный снизу вверх. Найдите  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , а также величины токов, протекающих через сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ .

## Вариант 2

1. Два одинаково заряженных маленьких шарика массой по 0,5 г, подвешенные на шелковых нитях длиной по 1 м, отталкиваясь друг от друга, разошлись на 4 см. Найдите величину заряда каждого шарика.

2. На отрезке тонкого прямого проводника длиной  $\ell = 20$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 6$  мкКл/м. Вычислите напряженность  $E$ , создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

3. Восемь заряженных водяных капель радиусом 1 мм и зарядом 0,1 нКл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найдите потенциал большой капли.

4. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов  $U = 600$  В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком (фарфор). Определите диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до  $U_1 = 100$  В.

5. ЭДС батареи 8 В. При силе тока  $I = 2$  А КПД батареи равен 0,75. Определите внутреннее сопротивление батареи.

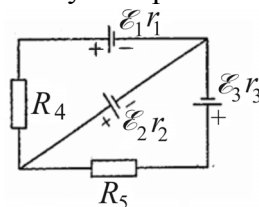
6. Сила тока в проводнике сопротивлением 12 Ом равномерно убывает от 5 А до нуля в течение 10 с. Какое количество теплоты выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

7. Определите силу тока через элемент с ЭДС  $\mathcal{E}_2$  в цепи, показанной на рисунке,

если:  $\mathcal{E}_1 = 1$  В,  $\mathcal{E}_2 = 2$  В,  $\mathcal{E}_3 = 3$  В,

$r_1 = 1$  Ом,  $r_2 = 0,5$  Ом,  $r_3 = 0,3$  Ом,

$R_4 = 1$  Ом,  $R_5 = 0,3$  Ом.



## Вариант 3

1. Три одинаковых точечных заряда по 2 нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см. Определите величину и направление силы, действующей на один из зарядов со стороны двух других.

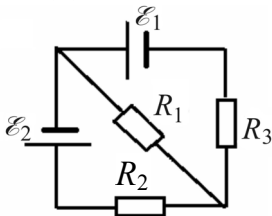
2. Параллельно бесконечной пластине, несущей заряд, равномерно распределенный по ее площади с поверхностной плотностью  $\sigma = 20 \text{ нКл/м}^2$ , расположена нить с равномерно распределенным по длине зарядом ( $\tau = 0,4 \text{ нКл/м}$ ). Определите силу  $F$ , действующую на отрезок нити длиной 1 м.

3. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 10 \text{ нКл/м}$ . Вычислите потенциал  $\phi$ , создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

4. Определите электрическую емкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора ( $\epsilon_1 = 5$ ) толщиной  $d_1 = 2 \text{ мм}$  и эбонита ( $\epsilon_2 = 3$ ) толщиной  $d_2 = 1,5 \text{ мм}$ , если площадь пластин  $S = 100 \text{ см}^2$ .

5. Определите внутреннее сопротивление источника тока, имеющего ЭДС 1,1 В, если подключенный к его зажимам вольтметр показал 1 В при сопротивлении внешней цепи 2 Ом.

6. В проводнике за время  $t = 10 \text{ с}$  при равномерном нарастании силы тока от  $I_1 = 1 \text{ А}$  до  $I_2 = 2 \text{ А}$  выделилось количество теплоты  $Q = 5 \text{ кДж}$ . Найдите сопротивление проводника.



7. В схеме, показанной на рисунке,  $\mathcal{E}_1 = 2,1 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1,9 \text{ В}$ ,  $R_1 = 45 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ . Найдите силу тока во всех участках цепи. Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

#### Вариант 4

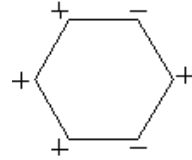
1. Если расстояние между двумя зарядами уменьшается на 50 см, то сила взаимодействия увеличивается в два раза. Найдите исходное расстояние.

2. Две длинные одинаково заряженные нити расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях  $\tau_1 = \tau_2 = 0,1 \text{ мкКл/см}$ . Найдите величину и направление напряженности результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см от каждой нити.

3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 10 см расположены равные по модулю заряды, как показано на рисунке.



Напряженность поля в центре шестиугольника 1000 В/м. Определите потенциал поля в центре фигуры.



4. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = 0,2$  мкКл/м<sup>2</sup>. Расстояние  $d$  между пластинами равно 1 мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния  $d$  между пластинами до 3 мм?

5. Катушка и амперметр присоединены к источнику тока. К клеммам катушки присоединен вольтметр с сопротивлением 2 кОм. Амперметр показывает силу тока  $I = 0,25$  А, вольтметр – напряжение  $U = 100$  В. Определите сопротивление катушки.

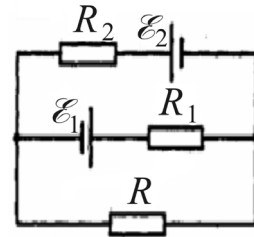
6. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от  $I = 0$  до некоторого максимального значения в течение времени  $t = 10$  с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты  $Q = 1$  кДж. Определите скорость нарастания тока в проводнике, если сопротивление его равно 3 Ом.

7. Найдите значение и направление тока через сопротивление  $R_3$  в цепи, изображенной на рисунке, если:

$$\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}, \mathcal{E}_2 = 3,7 \text{ В},$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 20 \text{ Ом}, R_3 = 5 \text{ Ом}.$$

Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.



### Вариант 5

1. Четыре точечных заряда по 10 нКл расположены в вершинах квадрата со стороной 10 см. Найдите силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

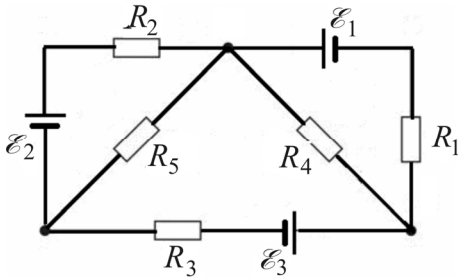
2. На отрезке тонкого прямого проводника длиной 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 3$  мкКл/м. Вычислите напряженность  $E$ , создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние 10 см.

3. В центре равномерно заряженной ( $q_1 = 20$  нКл) металлической сферы радиусом  $R = 10$  см находится точечный заряд  $q_2 = -10$  нКл. Определите напряженность и потенциал электрического поля в точках  $A$  и  $B$ , удаленных от точечного заряда на расстояния соответственно 5 и 15 см.

4. Емкость  $C$  плоского конденсатора равна  $1,5 \text{ мкФ}$ . Расстояние  $d_1$  между пластинами равно  $5 \text{ мм}$ . Какова будет емкость конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита толщиной  $d_2 = 3 \text{ мм}$ ?

5. При подключении к батарее гальванических элементов сопротивления  $R_1 = 16 \text{ Ом}$  сила тока в цепи была равна  $1 \text{ А}$ , а при подключении сопротивления  $R_2 = 8 \text{ Ом}$  сила тока стала равной  $1,8 \text{ А}$ . Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

6. По проводнику сопротивлением  $3 \text{ Ом}$  течет ток, сила которого равномерно возрастает. Количество теплоты  $Q$ , выделившееся в проводнике за время  $t = 8 \text{ с}$ , равно  $200 \text{ Дж}$ . Определите количество электричества  $q$ , протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.



7. В схеме, изображенной на рисунке,  $\mathcal{E}_1 = 60 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 80 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_3 = 70 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 65 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 85 \text{ Ом}$ . Определите силу тока, протекающего через сопротивление  $R_5$ .

### Вариант 6

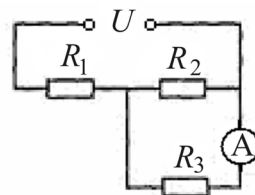
1. Расстояние между двумя точечными зарядами  $2$  и  $4 \text{ нКл}$  равно  $60 \text{ см}$ . Определите точку на прямой, проходящей через эти заряды, в которую нужно поместить третий заряд так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определите величину и знак заряда.

2. В трех вершинах квадрата находится по заряду в  $3 \text{ нКл}$ . Найдите напряженность электрического поля в четвертой вершине квадрата. Сторона квадрата равна  $10 \text{ см}$ .

3. Электрическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$ . Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях  $x_1 = 20 \text{ см}$  и  $x_2 = 50 \text{ см}$  от плоскости.

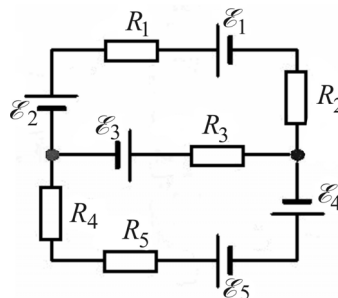
4. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка ( $\epsilon = 7$ ). Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 100 \text{ В}$ . Какова будет разность потенциалов  $U_2$ , если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора?

5. Напряжение на зажимах элемента в замкнутой цепи  $U = 2,1$  В; сопротивления, соединенные так, как показано на рисунке,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом и  $R_3 = 3$  Ом. Какой ток  $I$  показывает амперметр?



6. В проводнике за время  $t = 5$  с при равномерном нарастании силы тока от  $I_1 = 2$  А до  $I_2 = 4$  А выделилось количество теплоты  $Q = 5$  кДж. Найдите сопротивление проводника.

7. В схеме, изображенной на рисунке,  $\mathcal{E}_1 = 10$  В,  $\mathcal{E}_2 = 20$  В,  $\mathcal{E}_3 = 30$  В,  $\mathcal{E}_4 = 40$  В,  $\mathcal{E}_5 = 50$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 45$  Ом,  $R_4 = 65$  Ом,  $R_5 = 85$  Ом. Определите силу тока во всех участках цепи. Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.



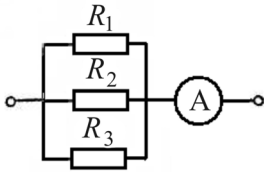
### Вариант 7

1. На расстоянии 20 см находятся два точечных заряда  $-50$  и  $100$  нКл. Определите силу, действующую на заряд  $q_3 = -10$  нКл, удаленный от обоих на одинаковое расстояние, равное 20 см.

2. Медный шар радиусом  $R = 0,5$  см помещен в масло. Плотность масла  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Найдите заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле. Электрическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность  $E = 3,6$  МВ/м.

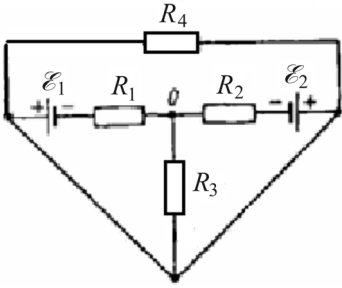
3. Электростатическое поле создается шаром радиусом  $R = 10$  см, равномерно заряженным с объемной плотностью  $\rho = 20$  нКл/м<sup>3</sup>. Определите разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях  $r_1 = 2$  см и  $r_2 = 8$  см от его центра.

4. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов  $U_1 = 500$  В. Площадь пластин  $S = 200$  см<sup>2</sup>, расстояние между ними  $d = 1,5$  мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин ( $\epsilon = 2$ ). Определите разность потенциалов  $U_2$  между пластинами после внесения диэлектрика, а также емкости конденсатора  $C_1$  и  $C_2$  до и после внесения диэлектрика.



5. Сопротивления  $R_1, R_2 = 20$  Ом и  $R_3 = 15$  Ом соединены так, как показано на рисунке. Через сопротивление  $R_2$  течет ток  $I_2 = 0,3$  А. Амперметр показывает ток  $I = 0,8$  А. Найдите сопротивление  $R_1$ .

6. Сила тока в проводнике сопротивлением 10 Ом за время 50 с равномерно нарастает от 5 до 10 А. Определите количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике.



7. В электрическую цепь, показанную на рисунке, включены 4 сопротивления 1 кОм каждое и источники  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,8$  В. Определите силу тока во всех сопротивлениях. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

### Вариант 8

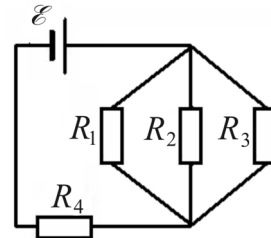
1. Два точечных заряда, находясь в воздухе на расстоянии 5 см, взаимодействуют друг с другом с силой 120 мкН, а находясь в некоторой непроводящей жидкости на расстоянии 10 см, с силой 15 мкН. Какова диэлектрическая проницаемость жидкости?

2. Расстояние между двумя положительными точечными зарядами 8 см. На расстоянии 6 см от первого заряда на прямой, соединяющей заряды, напряженность поля равна нулю. Найдите отношение величин первого заряда к величине второго.

3. Тонкий стержень длиной  $\ell = 10$  см несет равномерно распределенный заряд  $q = 1$  нКл. Определите потенциал электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от ближайшего его конца.

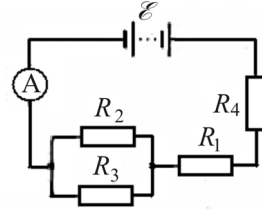
4. В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина ( $\epsilon = 2$ ) толщиной  $d = 1$  см, которая вплотную прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость?

5. Четыре сопротивления соединены так, как показано на рисунке. Найдите силу тока в сопротивлении  $R_2$  и падение напряжения на нем, если участки цепи имеют сопротивления  $R_1 = R_3 = 40$  Ом,  $R_2 = 80$  Ом,  $R_4 = 34$  Ом; ЭДС генератора 100 В. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.



6. Сколько витков никелиновой проволоки ( $\rho = 4,2 \cdot 10^{-7}$  Ом·м) надо намотать на фарфоровый цилиндр диаметром 1,5 см, чтобы сделать кипятильник, в котором за 10 мин закипает 1,2 л воды, взятой при начальной температуре  $10^\circ\text{C}$ ? КПД установки 60 %, диаметр проволоки 0,2 мм, напряжение на ней 100 В.

7. В цепи, показанной на рисунке, ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 120$  В, сопротивления  $R_3 = 20$  Ом,  $R_4 = 25$  Ом. На сопротивлении  $R_1$  падение напряжения  $U_1 = 40$  В. Амперметр показывает ток  $I = 2$  А. Найдите сопротивление  $R_2$ .



### Вариант 9

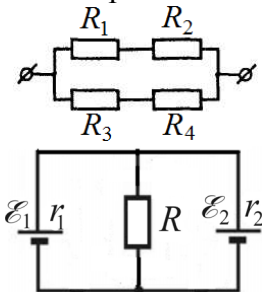
1. В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. Определите скорость электрона, если радиус орбиты  $r = 53$  пм, а также частоту  $\nu$  вращения электрона.

2. Два точечных заряда 6,4 и  $-6,4$  мкКл находятся на расстоянии 12 см друг от друга. Найдите напряженность электростатического поля в точке, удаленной на 8 см от первого заряда и на 8 см от второго.

3. Электростатическое поле создается бесконечным цилиндром радиусом 8 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью  $\tau = 10$  нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях  $r_1 = 2$  мм и  $r_2 = 7$  мм от поверхности цилиндра.

4. Требуется изготовить конденсатор емкостью  $C = 250$  пФ. Для этого на парафинированную бумагу ( $\epsilon = 2$ ) толщиной  $d = 0,05$  мм наклеивают с обеих сторон кружки станиоля. Каким должен быть диаметр  $D$  кружков станиоля?

5. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до 2 В, необходимо включить в сеть с напряжением 12 В. Какое для этого потребуется дополнительное сопротивление, если сила тока в вольтметре не должна превышать 0,05 А?



6. На рисунке представлен участок электрической цепи с сопротивлениями  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 4$  Ом. Каково отношение количеств теплоты  $Q_1/Q_3$ , выделившихся на резисторах  $R_1$  и  $R_3$  за одно и то же время?

7. Два элемента с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 6$  В и  $\mathcal{E}_2 = 5$  В и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 1$  Ом и

$r_2 = 2$  Ом соединены по схеме, изображенной на рисунке. Найдите силу тока, текущего через резистор с сопротивлением  $R = 10$  Ом.

### Вариант 10

1. Два отрицательных точечных заряда  $-9$  и  $-36$  нКл расположены на расстоянии  $3$  м друг от друга. Когда в некоторой точке поместили заряд, то все три заряда оказались в равновесии. Найдите третий заряд и его расстояние от первого заряда.

2. Тонкий стержень длиной  $12$  см заряжен с линейной плотностью  $\tau = 200$  нКл/м. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии  $r = 5$  см от стержня против его середины.

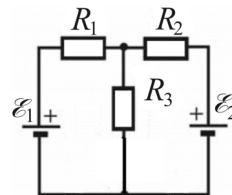
3. Электростатическое поле создается сферой радиусом  $R = 5$  см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma = 1$  нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях  $r_1 = 10$  см и  $r_2 = 15$  см от центра сферы.

4. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов  $U_1 = 150$  В. Определите разность потенциалов на конденсаторах  $U_2$ , если после отключения их от источника тока у одного конденсатора уменьшили расстояние между пластинами в два раза.

5. По участку цепи, состоящему из четырех одинаковых параллельно соединенных проводников, течет ток силой  $I_0 = 4,8$  А. Какой ток будет течь по участку, если эти проводники соединить последовательно при том же напряжении на его концах?

6. Клеммы источника тока с ЭДС, равной  $10$  В, замыкают один раз резистором с сопротивлением  $4$  Ом, второй – резистором с сопротивлением  $9$  Ом. Найдите мощность, выделяемую во внешней цепи, если она в обоих случаях одинакова.

7. В схеме, показанной на рисунке,  $\mathcal{E}_1 = 20$  В,  $\mathcal{E}_2 = 25$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 12$  Ом, внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Определите силу тока, протекающего через сопротивление  $R_3$ .

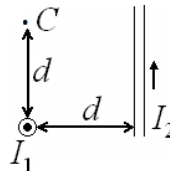


### Контрольная работа № 3. Магнетизм. Волновая оптика

Примеры решения задач приведены в разделах 3.3, 3.4, 4.1, 4.2.

#### Вариант 1

1. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом, как показано на рисунке. Расстояние между ними  $d = 20$  см. По проводам текут токи  $I_1 = 30$  А и  $I_2 = 40$  А. Определите магнитную индукцию в точке  $C$ , одинаково удаленной от обоих проводников.



2. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой 100 А. Определите силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее длине.

3. Прямоугольный контур площадью  $150 \text{ см}^2$  с током силой 4 А находится в магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл и занимает положение устойчивого равновесия. Какую надо совершить работу, чтобы медленно повернуть его на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон?

4. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 104$  В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ( $E = 10$  кВ/м) и магнитное ( $B = 0,1$  Тл) поля. Найдите отношение заряда  $q$   $\alpha$ -частицы к ее массе  $m$ , если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не отклоняется от прямолинейной траектории.

5. Соленоид диаметром 10 см и длиной 60 см имеет 1000 витков. Сила тока в нем равномерно возрастает на 0,2 А за 1 с. На соленоид надето кольцо из медной проволоки, имеющей площадь поперечного сечения  $2 \text{ мм}^2$ . Найдите силу индукционного тока, возникающего в кольце.

6. В железном сердечнике соленоида индукция  $B = 1,3$  Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определите, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

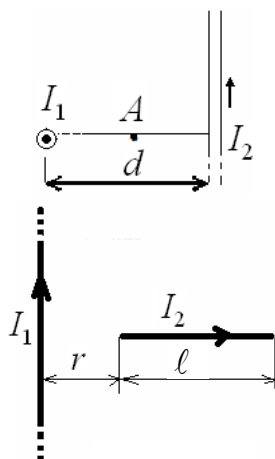
7. Алмазная пластина освещается фиолетовым светом с частотой  $0,75 \cdot 10^{15}$  Гц. Найдите длины волн фиолетового света в вакууме и в алмазе, если показатель преломления алмаза для этих волн 2,465.

8. Мыльная пленка толщиной 0,3 мкм освещается белым светом, падающим нормально, и рассматривается в проходящем свете. В какой цвет будет окрашена пленка, если показатель преломления 1,33?

9. Зеленый свет ( $\lambda = 500$  нм) падает на щель шириной 8 мкм. Определите, под каким углом наблюдаются 1-й и 2-й максимумы.

10. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен  $\alpha$ . Как поляризатор, так и анализатор поглощают 8 % падающего на них света. Интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9 % интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найдите угол  $\alpha$ .

### Вариант 2



1. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом, как показано на рисунке. По проводам текут токи  $I_1 = 80$  А и  $I_2 = 60$  А. Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Определите магнитную индукцию в точке  $A$ , одинаково удаленной от обоих проводников.

2. Металлический стержень длиной  $\ell = 15$  см расположен перпендикулярно бесконечно длинному прямому проводу, по которому течет ток  $I_1 = 2$  А, как показано на рисунке. Найдите силу, действующую на стержень со стороны магнитного поля, создаваемого проводом, если по стержню течет ток  $I_2 = 0,5$  А, а расстояние от провода до ближайшего конца стержня  $r = 5$  см.

3. Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля  $H = 150$  кА/м. По контуру течет ток  $I = 2$  А. Радиус контура  $R = 2$  см. Какую работу  $A$  надо



совершить, чтобы повернуть контур на угол  $\varphi = 90^\circ$  вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

4. Магнитный момент витка равен  $0,2$  Дж/Тл. Определите силу тока в витке, если его диаметр  $d = 10$  см.

5. Квадратную проволочную рамку со стороной  $a = 3$  м поместили в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 1$  Тл перпендикулярно линиям индукции. Затем, не вынимая проволоку из поля и не изменяя ее ориентации, деформировали ее в прямоугольник с отношением сторон  $1: 2$ . Какой заряд прошел при этом через поперечное сечение проволоки? Сопротивление рамки  $R = 1$  Ом.

6. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной  $\ell_0 = 5$  мм. Длина  $\ell$  средней линии кольца равна  $1$  м. Сколько витков содержит обмотка на кольце, если при силе тока  $I = 4$  А индукция магнитного поля в зазоре равна  $0,5$  Тл?

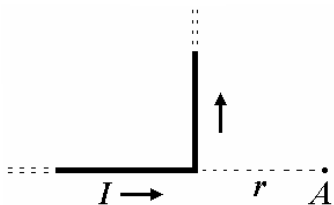
7. Предельный угол полного отражения для пары веществ стекло – воздух равен  $45^\circ$ . Чему равен показатель преломления этого сорта стекла?

8. На поверхность стеклянного объектива ( $n_1 = 1,51$ ) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой  $n_2 = 1,2$  («просветляющая пленка»). При какой наименьшей толщине этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

9. Дифракционная решетка содержит  $400$  штрихов на  $1$  мм. На нее падает красный свет с длиной волны  $\lambda = 650$  нм. Под каким углом виден 1-й максимум? Сколько всего максимумов дает эта решетка?

10. Кварцевую пластинку поместили между скрещенными николями. При какой наименьшей толщине  $d_{\min}$  кварцевой пластинки поле зрения между николями будет максимально просветлено? Постоянная вращения кварца  $\alpha = 27$  град/мм.

### Вариант 3



1. Бесконечно длинный провод согнут под прямым углом, как показано на рисунке. По проводу течет ток  $I = 20$  А. Какова магнитная индукция в точке  $A$ , если  $r = 5$  см?

2. На двух легких проводящих нитях горизонтально висит металлический стержень длиной 0,25 м и массой 15 г. Стержень находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определите угол отклонения нитей, если по стержню пропустить ток 0,2 А.

3. Квадратный контур со стороной  $a = 10$  см, в котором течет ток  $I = 6$  А, находится в магнитном поле ( $B = 0,8$  Тл) под углом  $\beta = 50^\circ$  к линиям индукции. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

4. Очень короткая катушка содержит 1000 витков тонкого провода. Катушка имеет квадратное сечение со стороной  $a = 10$  см. Найдите магнитный момент катушки при силе тока  $I = 1$  А.

5. В проволочной рамке площадью  $100 \text{ см}^2$  возбуждается ЭДС индукции с амплитудой 1,4 В. Число витков в рамке 200. Рамка вращается с постоянной частотой в однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 0,15$  Тл. В начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна вектору  $B$ . Определите ЭДС индукции в рамке спустя 0,1 с.

6. Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения  $S = 20 \text{ см}^2$  и число витков  $N = 500$ . Индуктивность катушки с сердечником  $L = 0,28$  Гн при токе через обмотку  $I = 5$  А. Найдите магнитную проницаемость  $\mu$  железного сердечника.

7. Под каким углом должен падать луч на поверхность стекла ( $n = 1,5$ ), чтобы угол преломления был в 2 раза меньше угла падения?

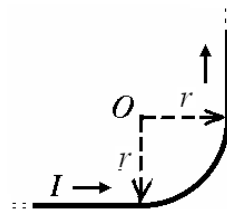
8. Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим нормально. Найдите радиус 4-го синего кольца ( $\lambda = 400$  нм). Наблюдение производится в проходящем свете. Радиус кривизны линзы равен 5 м.

9. Свет с интенсивностью  $J_0$  падает на непрозрачный диск, перекрывающий одну зону Френеля. Найдите отношение интенсивности  $J$  в центре дифракционной картины к интенсивности  $J_0$ .

10. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен  $57^\circ 05'$ . Определите скорость света в кристалле каменной соли.

### Вариант 4

1. По бесконечно длинному прямому проводу, изогнутому так, как показано на рисунке, течет ток  $I = 100$  А. Определите магнитную индукцию в точке  $O$ , если  $r = 10$  см.



2. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом  $R = 10$  см, текут одинаковые токи  $I = 10$  А в каждом. Найдите силу взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние  $d$  между центрами колец равно 1 мм.

3. Виток, в котором поддерживается сила тока  $I = 60$  А, свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 20$  мТл). Диаметр витка  $d = 10$  см. Какую работу  $A$  нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол  $\alpha = \pi/3$ ?

4. Диск радиусом  $R = 10$  см несет равномерно распределенный по поверхности заряд  $q = 0,2$  мкКл. Диск вращается с частотой  $\nu = 20$  с<sup>-1</sup> относительно оси, проходящей через его центр. Определите отношение магнитного момента к моменту импульса ( $p_m/L$ ), если масса диска равна 100 г.

5. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 6 \cdot 10^{-2}$  Тл находится соленоид диаметром  $d = 8$  см, имеющий  $N = 80$  витков проволоки. Соленоид поворачивают на угол  $\alpha = 180^\circ$  за время  $\Delta t = 0,2$  с так, что его ось остается направленной вдоль линий индукции поля. Определите среднее значение ЭДС, возникающей в соленоиде.

6. Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником  $S = 10$  см<sup>2</sup>, длина соленоида  $\ell = 1$  м. Найдите магнитную проницаемость  $\mu$  материала сердечника, если магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида,  $\Phi = 1,4$  мВб. Какому току  $I$  соответствует этот магнитный поток, если индуктивность соленоида при этих условиях  $L = 0,44$  Гн?

7. Определите показатель преломления вещества, если скорость распространения света в веществе составляет  $2 \cdot 10^8$  м/с.

8. На мыльную пленку ( $n = 1,33$ ) падает белый свет под углом  $45^\circ$ . При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ( $\lambda = 600$  нм)?

9. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если для того чтобы увидеть красную линию ( $\lambda = 700$  нм) в спектре 2-го порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом  $30^\circ$  к оси коллиматора? Какое число штрихов нанесено на 1 см длины этой решетки? Свет падает на решетку нормально.

10. Анализатор в 2 раза уменьшает интенсивность света, проходящего к нему от поляризатора. Определите угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. Потерями света в анализаторе можно пренебречь.

### Вариант 5

1. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток  $I = 100$  А. Вычислите магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на 10 см.

2. Проводник длиной 24 см и сопротивлением 36 Ом согнут в форме равностороннего треугольника и помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, перпендикулярное плоскости треугольника. Какая результирующая сила будет действовать на проводник, если на две соседние вершины образованной фигуры подать напряжение 5,4 В?

3. На длинный картонный каркас диаметром  $d_1 = 5$  см уложена однослойная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром  $d_2 = 0,2$  мм. Определите магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый таким соленоидом при силе тока  $I = 0,5$  А.

4. Из проволоки длиной  $\ell = 20$  см сделаны квадратный и круговой контуры и помещены в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Найдите вращающие моменты, действующие на каждый контур, если по ним течет ток силой 2 А. Плоскости контуров составляют угол  $\alpha = 45^\circ$  с направлением вектора  $\vec{B}$ .

5. Катушка диаметром 5 см, содержащая 1000 витков, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно изменяется со скоростью  $\Delta B/\Delta t = 0,01$  Тл/с. К концам катушки подключен конденсатор емкостью 10 мкФ. Определите заряд на нем.

6. На железное кольцо намотано в один слой 500 витков провода. Средний диаметр  $d$  кольца равен 25 см. Определите магнитную индукцию  $B$  в железе и магнитную проницаемость железа, если сила тока в обмотке 2,5 А.

7. Угол преломления светового луча, падающего из воздуха на поверхность вещества с показателем преломления 1,732, в 2 раза меньше угла падения  $\alpha$ . Найдите угол  $\alpha$ .

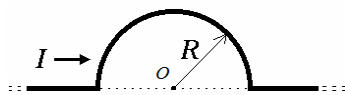
8. Свет с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина. В проходящем свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых  $\Delta x = 0,21$  мм. Найдите угол между гранями клина.

9. При нормальном падении света на дифракционную решетку максимум 2-го порядка для  $\lambda_1 = 0,65$  мкм наблюдается под углом  $45^\circ$ . Найдите угол дифракции для  $\lambda_2 = 0,5$  мкм в 3-м порядке.

10. Свет падает из стекла в жидкость, частично отражается, частично преломляется. Найдите показатель преломления жидкости, если отраженный луч полностью поляризован, когда угол преломления равен  $42^\circ 30'$ . Какова скорость света в жидкости?

### Вариант 6

1. Бесконечно длинный прямой провод с током ( $I = 50$  А) имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10$  см, как показано на рисунке. Определите в точке  $O$  магнитную индукцию поля, создаваемого этим током.



2. Провод в виде тонкого полукольца радиусом  $R = 10$  см находится в однородном магнитном поле ( $B = 50$  мТл). По нему течет ток  $I = 10$  А. Найдите силу, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

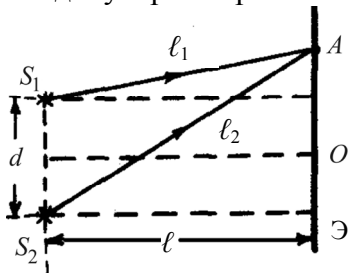
3. В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током  $I = 20$  А расположена квадратная рамка со стороной, длина которой  $a = 10$  см, причем две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние  $d$  от провода до ближайшей стороны рамки равно 5 см. Определите магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий рамку.

4. Тонкое кольцо массой 10 г и радиусом  $R = 8$  см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau = 10$  нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой  $\nu = 15$  с<sup>-1</sup> относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определите магнитный момент кругового тока, создаваемого кольцом.

5. Квадратная рамка из медной проволоки сечением 1 мм<sup>2</sup> помещена в магнитное поле, индукция которого изменяется по закону  $B = B_0 \sin \omega t$ , где  $B_0 = 0,01$  Тл,  $\omega = 2\pi/T$  и  $T = 0,02$  с. Площадь рамки 25 см<sup>2</sup>. Плоскость рамки перпендикулярна направлению магнитного поля. Найдите зависимость от времени и наибольшее значение: 1) магнитного потока, пронизывающего рамку; 2) ЭДС индукции, возникшей в рамке; 3) силы тока, текущего по рамке.

6. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 1$  кА/м. Определите, пользуясь графиком зависимости  $B = f(H)$ , индукцию магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость железа.

7. Луч света падает на стекло ( $n = 1,5$ ). Преломленный луч перпендикулярен отраженному лучу. Чему равен угол падения?

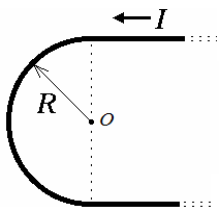


8. Найдите длину волны монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние от 1-го интерференционного максимума до центральной полосы  $y = 0,05$  см. Данные установки, изображенной на рисунке:  $l = 5$  м;  $d = 0,5$  см.

9. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если эта решетка может разрешить в 1-м порядке линии спектра калия со следующими длинами волн:  $\lambda_1 = 404,4$  нм и  $\lambda_2 = 404,7$  нм? Ширина решетки 3 см.

10. Предельный угол полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43°. Определите угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

### Вариант 7



1. Бесконечно длинный прямой провод с током ( $I = 50$  А) имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10$  см, как показано на рисунке. Определите в точке  $O$  магнитную индукцию поля, создаваемого этим током.

2. В однородном магнитном поле, индукция которого равна 2 Тл и направлена под углом  $30^\circ$  к вертикали, вертикально вверх движется прямой проводник массой 2 кг, по которому течет ток 4 А. Через 3 с после начала движения проводник имеет скорость 10 м/с. Определите длину проводника.

3. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией  $B = 0,2$  Тл находится квадратный проводящий контур со стороной  $a = 20$  см и током  $I = 10$  А. Плоскость квадрата составляет с направлением поля угол в  $30^\circ$ . Определите работу удаления контура за пределы поля.

4. Короткая катушка площадью  $S$  поперечного сечения, равной  $150 \text{ см}^2$ , содержит  $N = 200$  витков провода, по которому течет ток  $I = 4$  А. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H = 8$  кА/м. Определите магнитный момент  $p_m$  катушки, а также вращающий момент  $M$ , действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с линиями индукции.

5. В магнитном поле, индукция которого 0,5 Тл, вращается стержень длиной 1 м с постоянной угловой скоростью 20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна силовым линиям магнитного поля. Найдите ЭДС индукции, возникшую на концах стержня.

6. Имеется соленоид с железным сердечником длиной 50 см, площадью поперечного сечения  $10 \text{ см}^2$  и числом витков 1000. Найдите индуктивность этого соленоида, если по обмотке соленоида течет ток  $I = 0,2$  А.

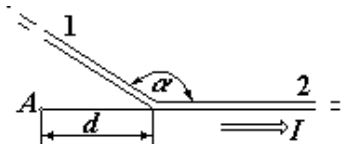
7. Вычислите предельный угол полного отражения для оргстекла ( $n = 1,4$ ).

8. Разность хода лучей от двух когерентных источников света до некоторой точки на экране равна 4,36 мм. Каков будет результат интерференции света в этой точке, если длина волны света 435,8 нм?

9. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Максимум 3-го порядка наблюдается под углом  $36^\circ 48'$  к нормали. Найдите постоянную дифракционной решетки, выраженную в длинах волн падающего света.

10. Чему равен показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления  $30^\circ$ ?

## Вариант 8



1. Длинный провод с током ( $I = 50 \text{ А}$ ) изогнут под углом  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ , как показано на рисунке. Определите магнитную индукцию  $\vec{B}$  в точке  $A$ . Расстояние  $d = 5 \text{ см}$ .

2. Проводник длиной  $10 \text{ см}$  располагается горизонтально и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. При напряжении на проводнике  $100 \text{ В}$  магнитная сила уравновешивает силу тяжести. Чему равна плотность проводника, если его удельное сопротивление  $10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , а индукция магнитного поля  $B = 1 \text{ мТл}$ ?

3. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$  находится плоская катушка из  $100$  витков радиусом  $R = 10 \text{ см}$ , плоскость которой с направлением поля составляет угол  $\beta = 60^\circ$ . По катушке течет ток  $I = 10 \text{ А}$ . Определите: 1) вращающий момент, действующий на катушку; 2) работу для удаления этой катушки из магнитного поля.

4. Рамка гальванометра длиной  $a = 4 \text{ см}$  и шириной  $b = 1,5 \text{ см}$ , содержащая  $N = 200$  витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$ . Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найдите: 1) механический момент  $M$ , действующий на рамку, когда по витку течет ток  $I = 1 \text{ мА}$ ; 2) магнитный момент  $p_m$  рамки при этом токе.

5. Скорость самолета равна  $960 \text{ км/час}$ . Найдите ЭДС индукции, возникающую на концах крыльев самолета, если вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли равна  $25 \text{ А/м}$  и размах крыльев  $12,5 \text{ м}$ .

6. Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока  $\Phi = 42 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$  в соленоиде с железным сердечником длиной  $120 \text{ см}$  и площадью поперечного сечения  $3 \text{ см}^2$ ?

7. На горизонтальном дне водоема, имеющего глубину  $1,2 \text{ м}$ , лежит плоское зеркало. Луч света, преломившись на поверхности воды, отражается от зеркала и выходит в воздух. Расстояние от места вхождения луча в воду до места выхода отраженного луча из воды равно  $1,5 \text{ м}$ . Найдите угол падения луча. Показатель преломления воды  $1,33$ .



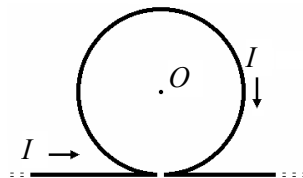
8. Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол  $\alpha = 0,2'$ . На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм. Определите ширину  $b$  интерференционной полосы.

9. Точечный источник света с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм расположен на расстоянии  $a = 100$  см перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом 1 мм. Найдите расстояние  $b$  от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии равно 3.

10. Определите показатель преломления вещества, если известно, что отраженный луч максимально поляризован, угол преломления  $\beta = 22,5^\circ$ , а естественный свет падает на вещество из воздуха.

### Вариант 9

1. Бесконечно длинный прямой провод с током ( $I = 50$  А) имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10$  см, как показано на рисунке. Определите в точке  $O$  магнитную индукцию поля, создаваемого этим током.



2. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиусом  $R = 15$  см, находится в однородном магнитном поле ( $B = 20$  мТл). По проводу течет ток  $I = 30$  А. Плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна линиям магнитной индукции, а подводящие провода находятся вне поля. Определите силу  $F$ , действующую на провод.

3. Плоский контур с током ( $I = 5$  А) свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 0,4$  Тл). Площадь контура  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\varphi = 40^\circ$ . Определите совершенную при этом работу  $A$ .

4. Круглая рамка с током ( $S = 15$  см<sup>2</sup>) закреплена параллельно магнитному полю с индукцией  $B = 0,1$  Тл, и на нее действует вращающий момент  $M = 0,45$  мН·м. Определите силу тока, текущего по рамке.

5. В магнитном поле, индукция которого равна  $0,05$  Тл, вращается стержень длиной 1 м. Ось вращения, проходящая через один из концов стержня, параллельна силовым линиям магнитного поля.

Найдите поток магнитной индукции, пересекаемый стержнем при каждом обороте.

6. На железный стержень длиной 50 см и сечением  $2 \text{ см}^2$  намотан в один слой провод так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится 20 витков. Определите энергию магнитного поля в сердечнике соленоида, если сила тока в обмотке 0,5 А.

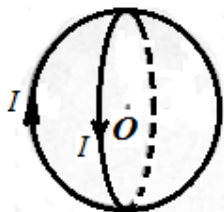
7. Найдите скорость распространения света в скипидаре, если при угле падения  $45^\circ$  угол преломления  $30^\circ$ .

8. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Определите показатель преломления жидкости, если радиус 3-го светлого кольца равен 3,65 мм. Наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы 10 м. Длина волны света 589 нм.

9. На диафрагму с круглым отверстием падает нормально параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ). На экране наблюдается дифракционная картина. При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно? Диаметр отверстия равен 1,96 мм.

10. Пластинку кварца толщиной  $d = 3 \text{ мм}$  поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол  $\varphi = 79,5^\circ$ . Какой наименьшей толщины  $d_{\min}$  следует взять пластинку, чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным?

### Вариант 10



1. По двум одинаковым круговым виткам радиусом 5 см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи  $I = 2 \text{ А}$ , как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля в центре витков.

2. В магнитном поле с индукцией  $B = 0,01 \text{ Тл}$  находится проводник, расположенный горизонтально. Линии индукции поля также горизонтальны и перпендикулярны к проводнику. Какой ток должен протекать через проводник, чтобы он завис? Масса единицы длины проводника 0,01 кг/м.

3. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью  $S = 100 \text{ см}^2$ . Поддерживая в контуре постоянную силу тока  $I = 50 \text{ А}$ , его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если при перемещении контура была совершена работа  $A = 0,4 \text{ Дж}$ .

4. Напряженность  $H$  магнитного поля в центре кругового витка равна  $200 \text{ А/м}$ . Магнитный момент  $p_m$  витка равен  $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ . Вычислите силу тока  $I$  в витке и радиус  $R$  витка.

5. В однородном магнитном поле, индукция которого равна  $0,1 \text{ Тл}$ , равномерно вращается катушка, состоящая из  $100$  витков проволоки. Катушка делает  $5$  об/с. Площадь поперечного сечения катушки  $100 \text{ см}^2$ . Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

6. Замкнутый железный сердечник длиной  $\ell = 50 \text{ см}$  имеет обмотку из  $N = 1000$  витков. По обмотке течет ток  $I_1 = 1 \text{ А}$ . Какой ток  $I_2$  надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

7. Световой луч падает на стеклянную плоскопараллельную пластину, толщиной  $6 \text{ см}$ . Угол падения  $60^\circ$ . Показатель преломления стекла  $1,5$ . Вычислите смещение луча при его прохождении сквозь пластину.

8. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены одна к другой так, что между ними образовался воздушный клин с углом  $\alpha = 30''$ . На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ ). На каком расстоянии  $\ell$  от линии соприкосновения пластинок будет наблюдаться в отраженном свете 2-я светлая полоса?

9. Монохроматический свет с  $\lambda = 589 \text{ нм}$  падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,5 \text{ мкм}$ , содержащую  $N = 10^4$  штрихов. Определите угловую ширину дифракционного максимума 2-го порядка.

10. Пучок света последовательно проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол  $\alpha = 40^\circ$ . Коэффициент поглощения  $k$  каждого николя равен  $0,15$ . Найдите, во сколько раз пучок света, выходящий из второго николя, ослаблен по сравнению с пучком, падающим на первый николю.

**Контрольная работа № 4. Квантовая оптика.  
Атомная и ядерная физика**

*Примеры решения задач* приведены в разделах 4.3, 5.1.

**Вариант 1**

1. Какова температура печи, если известно, что из отверстия в ней площадью  $4 \text{ см}^2$  излучается за 1 с энергия 22,7 Дж? Излучение считать излучением абсолютно черного тела.

2. Какова должна быть длина волны лучей, падающих на цинковую пластинку ( $A_{\text{вых}} = 4,0 \text{ эВ}$ ), чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была равна  $10^6 \text{ м/с}$ ?

3. Определите наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии водорода (серия Пашена).

4. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Когда угол между гранью кристалла и пучком составляет  $64^\circ$ , наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние между атомными плоскостями кристалла равным 200 пм, определите длину волны де Бройля электронов и их скорость.

5. За 8 суток распалось 75 % начального количества радиоактивного изотопа. Определите период полураспада.

6. Допишите ядерную реакцию:  ${}^4_7\text{N} + ? \rightarrow {}^{16}_8\text{O} + {}^4_2\text{He}$ .

7. Вычислите энергию ядерной реакции:  ${}^{16}_8\text{O} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He}$ . Освобождается или поглощается энергия?

**Вариант 2**

1. Вычислите энергию, излучаемую за время  $t = 1 \text{ мин}$  с площади  $S = 1 \text{ см}^2$  абсолютно черного тела, температура которого  $T = 1000 \text{ К}$ .

2. Найдите частоту света, вырывающего с поверхности металла электроны, полностью задерживающиеся обратным потенциалом 3 В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света  $6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ .

3. Найдите радиус первой боровской орбиты электрона в атоме водорода.

4. Найдите длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

5. Определите период полураспада радона, если за одни сутки из  $10^6$  атомов распадается  $1,75 \cdot 10^5$ . Чему равна постоянная распада?

6. Допишите ядерную реакцию:  ${}^7_3\text{Li} + p \rightarrow ? + {}^4_2\text{He}$ .

7. Определите, освобождается или поглощается энергия в ядерной реакции:  ${}^{44}_{20}\text{Ca} + p \rightarrow {}^{41}_{19}\text{K} + \alpha$ .

### Вариант 3

1. Мощность потока энергии, излучаемой из смотрового окна мартеновской печи,  $P = 2,17$  кВт. Площадь смотрового окошка  $S = 6$  см<sup>2</sup>. Определите температуру печи.

2. На фотоэлемент с катодом из рубидия ( $A_{\text{вых}} = 1,53$  эВ) падают лучи с длиной волны 100 нм. Найдите наименьшее значение задерживающей разности потенциалов, которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить эмиссию электронов.

3. Пользуясь теорией Бора, определите для однократно ионизированного атома гелия длину волны в спектре, соответствующую переходу со 2-й орбиты на 1-ю.

4. Электрон движется со скоростью  $v = 2 \cdot 10^8$  м/с. Определите длину волны де Бройля, учитывая изменение импульса электрона в зависимости от скорости.

5. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада  $1,44 \cdot 10^{-3}$  ч<sup>-1</sup>. Через какой промежуток времени распадается 75 % от первоначальной массы атомов?

6. Допишите ядерную реакцию:  ${}^{27}_{13}\text{Al} + n \rightarrow ? + {}^4_2\text{He}$ .

7. Найдите энергию, выделяющуюся при следующей реакции:  ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$ .

### Вариант 4

1. Из смотрового окошка излучается поток  $\Phi_T = 4$  кДж/мин. Определите температуру печи, если площадь окошка  $S = 8$  см<sup>2</sup>.

2. На металл падают рентгеновские лучи с длиной волны  $\lambda = 1$  нм. Пренебрегая работой выхода, определите максимальную скорость фотоэлектронов.

3. Вычислите для атомарного водорода длины волн первых трех спектральных линий серии Лаймана.

4. Протон движется со скоростью  $v = 1 \cdot 10^8$  м/с. Определите длину волны де Бройля, учитывая изменение импульса протона в зависимости от скорости.

5. При распаде изотопа  $^{24}\text{Na}$  распадается  $9,3 \cdot 10^{18}$  из  $2,52 \cdot 10^{19}$  атомов. Период полураспада 14,8 ч. Определите время и постоянную распада.

6. Допишите ядерную реакцию:  $^{14}_7\text{N} + n \rightarrow ^{14}_6\text{C} + ?$

7. Освобождается или поглощается энергия в следующей ядерной реакции:  $^{14}_7\text{N} + ^1_0n \rightarrow ^1_1\text{H} + ^{14}_6\text{C}?$

### Вариант 5

1. Температура абсолютно черного тела  $T = 2000$  К. Определите длину волны, на которую приходится максимум энергии излучения.

2. Красная граница фотоэффекта для платины лежит около 198 нм. Если платину прокалить при высокой температуре, то красная граница фотоэффекта станет равной 220 нм. На сколько электронвольт прокалывание уменьшает работу выхода электронов?

3. Определите длину волны, соответствующую 2-й спектральной линии в серии Бальмера.

4. Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,1 нм?

5. Какая доля радиоактивных ядер изотопа  $^{14}_6\text{C}$  распадается за 100 лет, если его период полураспада 5370 лет?

6. Какой заряд  $Z$  будет иметь атомное ядро изотопа урана  $^{238}_{92}\text{U}$  после  $\alpha$ -распада и двух  $\beta$ -распадов?

7. Вычислите энергию ядерной реакции:  $^7_3\text{Li} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^4_2\text{He}$ .

### Вариант 6

1. Абсолютно черное тело имеет температуру  $T_1 = 500$  К. Какова будет температура  $T_2$  тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в 5 раз?

2. На поверхность никеля падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 200$  нм. Красная граница фотоэффекта для ни-

келя 248 нм. Определите энергию падающих фотонов, работу выхода электронов, максимальную кинетическую энергию электронов и их скорость.

3. Наибольшая длина волны спектральной водородной линии серии Бальмера равна 656,3 нм. Определите по этой длине волны наибольшую длину волны в серии Лаймана.

4. Электрон движется по окружности радиусом  $r = 0,5$  см в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 8$  мТл. Определите длину волны де Бройля электрона.

5. Постоянная распада рубидия  ${}_{37}^{89}\text{Rb}$  равна  $7,7 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Определите период полураспада рубидия.

6. Определите число протонов  $Z$  и число нейтронов  $N$  в ядре изотопа углерода  ${}_{6}^{13}\text{C}$ .

7. Определите энергию, освобождающуюся в следующей ядерной реакции:  ${}_{20}^{44}\text{Ca} + p \rightarrow {}_{19}^{41}\text{K} + {}_{2}^{4}\text{He}$ .

### Вариант 7

1. Температура абсолютно черного тела  $127^\circ\text{C}$ . После повышения температуры суммарная мощность излучения увеличилась в 3 раза. Насколько повысилась при этом температура?

2. Красная граница фотоэффекта рубидия 0,81 мкм. Определите скорость фотоэлектронов при облучении рубидия светом с длиной волны 0,40 мкм. Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлектрону, чтобы прекратился фототок?

3. Вычислите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с 3-го энергетического уровня на 1-й.

4. Определите длину волны де Бройля электрона, если его кинетическая энергия  $W = 1$  кэВ.

5. Изотоп урана  ${}_{92}^{238}\text{U}$  массой 1 г излучает  $1,24 \cdot 10^4$   $\alpha$ -частиц в секунду. Определите период полураспада и постоянную распада данного изотопа.

6. При бомбардировке изотопа алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$   $\alpha$ -частицами получают протон и ядро какого-то элемента. Определите этот элемент.

7. Освобождается или поглощается энергия в ядерной реакции:  ${}_{1}^{3}\text{H} + {}_{1}^{2}\text{H} \rightarrow {}_{2}^{4}\text{He} + n$ ?

## Вариант 8

1. Найдите мощность излучения абсолютно черного тела, представляющего собой шар радиусом 10 см, который находится в комнате при температуре 20 °С.

2. Красная граница фотоэффекта рубидия 810 нм. Какое задерживающее напряжение нужно приложить к фотоэлементу, чтобы электронам, испускаемым рубидием под действием ультрафиолетовых лучей ( $\lambda = 100$  нм), не удалось преодолеть задерживающее поле?

3. Вычислите полную энергию электрона в атоме водорода, если он находится на 3-м энергетическом уровне.

4.  $\alpha$ -Частица движется со скоростью  $v = 2 \cdot 10^8$  м/с. Определите длину волны де Бройля, учитывая изменение импульса  $\alpha$ -частицы в зависимости от скорости.

5. Какая доля начального количества атомов распадается за 1 год в радиоактивном изотопе тория  ${}_{90}^{229}\text{Th}$ ?

6. Какая частица испускается в результате бомбардировки ядер азота  ${}_{7}^{14}\text{N}$  нейтроном, если в результате получается изотоп бора  ${}_{5}^{11}\text{B}$ ?

7. Освобождается или поглощается энергия в следующей ядерной реакции:  ${}_{4}^9\text{Be} + {}_{1}^2\text{H} \rightarrow {}_{5}^{10}\text{B} + n$ ?

## Вариант 9

1. Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости переместится с красной линии видимого спектра ( $\lambda_{\text{max1}} = 780$  нм) на фиолетовую ( $\lambda_{\text{max2}} = 390$  нм)?

2. Определите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка ( $A_{\text{вых}} = 4,0$  эВ) светом с длиной волны 0,25 мкм. Чему равна красная граница фотоэффекта?

3. В спектре излучения водорода интервал между двумя первыми линиями, принадлежащими серии Бальмера, составляет  $\Delta\lambda = 171$  нм. Определите постоянную Ридберга.

4. Найдите длину волны де Бройля протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U = 1$  кВ.

5. За какое время распадается 1/4 начального количества ядер радиоактивного изотопа с периодом полураспада 24 часа?



6. Допишите ядерную реакцию:  ${}_{25}^{55}\text{Mn} + ? \rightarrow {}_{27}^{58}\text{Co} + n$ .

7. Вычислите энергию ядерной реакции:  ${}_{3}^{7}\text{Li} + {}_{1}^{1}\text{H} \rightarrow {}_{4}^{7}\text{Be} + n$ .

Освобождается или поглощается эта энергия?

### Вариант 10

1. Вычислите энергию, излучаемую с поверхности Солнца площадью  $1 \text{ м}^2$  за 1 мин, приняв температуру его поверхности равной 5800 К. Считать Солнце абсолютно черным телом.

2. Катод фотоэлемента освещается светом с длиной волны  $\lambda$ . При отрицательном потенциале на аноде  $-1,6 \text{ В}$  ток в цепи прекратится. При изменении длины волны света в 1,5 раза для прекращения тока потребовалось подать на анод отрицательный потенциал  $-1,8 \text{ В}$ . Определите работу выхода материала катода.

3. Найдите период обращения электрона на первой боровской орбите.

4. Найдите длину волны де Бройля для электрона, находящегося на второй круговой орбите атома водорода.

5. Найдите постоянную радиоактивного распада радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за сутки на 18,2 %.

6. Ядро бериллия  ${}_{4}^{9}\text{Be}$ , соединившись с неизвестным ядром, превращается в ядро бора  ${}_{5}^{10}\text{B}$ , при этом испускается нейтрон. Каким было неизвестное ядро?

7. При реакции  ${}_{3}^{6}\text{Li} + \alpha \rightarrow {}_{4}^{9}\text{Be} + p$  освобождается энергия 5,028 МэВ. Определите массу изотопа  ${}_{3}^{6}\text{Li}$ . Массы остальных ядер взять из таблиц.

## 4. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### Лабораторная работа № 1. Обработка результатов измерений на примере задачи определения объема цилиндра

Цель: ознакомиться с методами обработки результатов измерений.

Приборы и принадлежности: цилиндр, штангенциркуль, микрометр.

#### *Сведения из теории*

Каждая лабораторная работа физического практикума связана с измерениями тех или иных физических величин. Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения.

Различают измерения прямые и косвенные.

*Прямые* измерения производятся с помощью приборов, непосредственно дающих значение измеряемой величины (длины – линейкой, штангенциркулем; времени – секундомером; силы тока – амперметром и т.д.).

При *косвенных* измерениях неизвестная величина определяется по результатам прямых измерений других величин, с которыми она связана определенной формулой; например, плотность вещества  $\rho$  вычисляют через измеренные массу  $m$  и объем  $V$  тела по формуле  $\rho = m/V$ ; электросопротивление проводника  $R$  – через измеренные напряжение  $U$  и силу тока  $I$  по формуле  $I = U/R$  и т.д.

При измерениях любой величины мы никогда не получаем ее истинного значения. Это объясняется принципиальной невозможностью устранить все посторонние влияния на процесс измерения. Иначе говоря, при любых измерениях мы допускаем ошибки. Их величину принято характеризовать абсолютной погрешностью измерений  $\Delta x$  и относительной погрешностью  $\varepsilon$ . Эти характеристики не являются независимыми. На способах определения  $\Delta x$  подробно остановимся ниже. Относительной погрешностью измерений называют отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Поскольку  $x_0$  – величина неизвестная, то на практике  $x_0$  заменяют найденным из опыта среднеарифметическим значением  $\langle x \rangle$ , поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}. \quad (1)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Таким образом, задача всякого измерения состоит в нахождении значения измеряемой величины, наиболее близкого к истинному, и оценки абсолютной и относительной погрешностей.

**Погрешности прямых измерений.** Принято различать три типа погрешностей прямых измерений: промахи, случайные и систематические погрешности.

*Промахи* – грубые ошибки, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Они вызываются невнимательностью экспериментатора, использованием неисправных приборов и т.д. Как правило, промахи быстро выявляются, и наблюдения, содержащие их, следует отбрасывать, как не заслуживающие доверия.

*Случайные погрешности* – погрешности, вызванные большим числом случайных неконтролируемых помех (сотрясением фундамента здания, изменением напряжения электрической сети, реакцией наблюдателя). В итоге при повторных наблюдениях получаются несколько отличающиеся друг от друга результаты. Исключить случайные погрешности нельзя, можно лишь оценить их величину. Как это сделать, нам подсказывает так называемая теория погрешностей. В основе этой теории лежат два предположения, подтверждаемых опытом:

- а) при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;
- б) большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые.

Из этих предположений следует, что при многократных измерениях величины  $x$  наиболее близким к ее истинному значению  $x_0$  является среднее арифметическое значение:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (2)$$

где  $n$  – число измерений.

Упомянутая выше теория погрешностей дает возможность найти величину случайной погрешности  $\Delta x_{\text{сл}}$ , т.е. расхождение между  $x_0$  и  $\langle x \rangle$ . При этом исходят из следующих соображений.

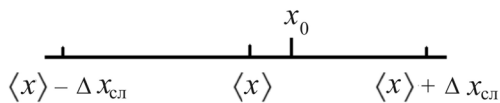


Рис.

Пусть  $\alpha$  характеризует вероятность того, что истинное значение  $x_0$  измеряемой величины отличается

от  $\langle x \rangle$  на величину, не большую  $\Delta x_{\text{сл}}$ , т.е. вероятность того, что истинное значение попадет в интервал от  $(\langle x \rangle - \Delta x_{\text{сл}})$  до  $(\langle x \rangle + \Delta x_{\text{сл}})$  (рисунок). Например, если  $\alpha = 0,95$ , то это означает, что при многократных повторениях опыта ошибки отдельных измерений в 95 случаях из 100 не превысят значения  $\Delta x_{\text{сл}}$ . Вероятность  $\alpha$  называется *доверительной вероятностью* или *надежностью*, а интервал значений  $(\langle x \rangle \pm \Delta x_{\text{сл}})$  – *доверительным интервалом*. Величина  $\Delta x_{\text{сл}}$  – это *полуширина* доверительного интервала. Ее-то и принимают за *абсолютную случайную погрешность*.

Задача, очевидно, состоит в том, чтобы отыскать  $\Delta x_{\text{сл}}$  при наперед заданном значении  $\alpha$ . Решению этого вопроса помогает существующая между  $\Delta x_{\text{сл}}$  и  $\alpha$  математическая связь. Качественно эта связь ясна: чем с большей надежностью мы хотим указать результат данных измерений, тем больше должен быть доверительный интервал.

В теории погрешностей в качестве единицы ширины доверительного интервала выбрана так называемая *средняя квадратичная погрешность* результата измерений

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}, \quad (3)$$

где  $\langle x \rangle$  – среднее для измеренных  $n$  значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ );  $\Delta x_i$  – отклонение  $i$ -го наблюдения от среднего значения,  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ ;  $n$  – число измерений.

В случае небольшого числа измерений (именно так обстоит дело в учебных лабораториях) полуширину доверительного интервала вычисляют по формуле:

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} \cdot \Delta S = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}, \quad (4)$$

где  $t_{\alpha, n}$  – *коэффициент Стьюдента* (зависит от  $\alpha$  и  $n$ ). Зависимость  $t_{\alpha, n}$  от  $n$  понятна: чем больше  $n$ , тем меньше  $\langle x \rangle$  отличается от ис-

тинного значения и тем меньше будет доверительный интервал, точнее результат измерения, а значит, меньше  $t_{\alpha,n}$ .

*Систематическими* называются погрешности, которые сохраняют свою величину и знак во всех однородных (одинаковых) измерениях. Систематические ошибки вызываются разными причинами, односторонне влияющими на результат измерений:

– ограниченной точностью приборов (измерительных инструментов) – приборные (инструментальные) погрешности;

– неправильной настройкой (неравные плечи весов, стрелка не установлена на ноль и т.д.);

– в расчетных формулах не учтено влияние некоторых второстепенных факторов (например, при взвешивании не учитывается сила Архимеда, при измерении электросопротивления не учитывается сопротивление проводящих проводов);

– округлениями, которые производятся при измерениях и вычислениях.

В большинстве случаев систематические погрешности могут быть изучены и скомпенсированы путем внесения поправок в результаты измерений. Если же сделать этого нельзя (или сложно), необходимо правильно учесть вклад систематической ошибки в общую ошибку измерений.

При выполнении лабораторных работ приходится оценивать, как правило, следующие систематические ошибки:

1. *Приборная (инструментальная) погрешность*. Погрешность показания прибора (например, связанная с неправильностью разбивки шкалы амперметра, линейки) является вполне определенной. При обработке результатов измерений этот вид погрешностей задается в виде так называемой *предельной погрешности прибора* (приборной погрешности), указывающей, какова максимально возможная погрешность при использовании данного прибора. При этом для одних приборов указывается предельная абсолютная погрешность  $\Delta x_{\text{пр}}$ , для других (электроизмерительных, части оптических) предельная относительная погрешность (класс точности прибора  $k$ ).

*Классом точности* прибора называется отношение предельной абсолютной погрешности к максимальному значению измеряемой прибором величины:

$$k = \frac{\Delta x_{\text{пр}}}{x_{\text{max}}} \cdot 100 \%. \quad (5)$$

Классов точности семь: 0,02; 0,05; 0,1; 0,5; 1; 2,5; 4. Это число указано на шкале прибора. Зная класс точности и пределы измерения прибора, можно рассчитать его предельную погрешность:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \frac{k x_{\text{max}}}{100}. \quad (6)$$

Приборная погрешность других приборов равна *точности* измерительного прибора, под которой понимают ту наименьшую величину, которую можно надежно определить с помощью данного прибора. *Точность* прибора зависит от цены наименьшего деления его шкалы и указывается на самом приборе или в его паспорте. Если этих данных нет, то пользуются следующими правилами. Если прибор снабжен нониусом (например, штангенциркуль), то его точность (и приборная погрешность) равна цене наименьшего деления:  $\Delta x_{\text{пр}} = \Delta$ . При этом  $\Delta = \ell / m$ , где  $\ell$  – цена наименьшего деления *основной шкалы* прибора,  $m$  – число делений нониуса. При отсутствии нониуса (линейка, термометр) приборная погрешность равна половине наименьшего деления шкалы прибора:  $\Delta x_{\text{пр}} = \frac{\Delta}{2}$ .

Приборная погрешность  $\Delta x_{\text{пр}}$  представляет собой наибольшую погрешность, даваемую прибором. Действительная же погрешность прибора  $\Delta x_{\text{пр}}^{\text{ст}}$  (стандартное отклонение) носит случайный характер и меньше  $\Delta x_{\text{пр}}$ . Строгих формул для перевода  $\Delta x_{\text{пр}}$  в  $\Delta x_{\text{пр}}^{\text{ст}}$  нет, чаще всего пользуются выражением

$$\Delta x_{\text{пр}}^{\text{ст}} = \frac{t_{\alpha, \infty}}{3} \cdot \Delta x_{\text{пр}}, \quad (7)$$

где  $t_{\alpha, \infty}$  – коэффициент Стьюдента при  $n = \infty$ .

Примечание. Для электроизмерительных приборов  $\Delta x_{\text{пр}}$  не зависит от значения измеряемой величины  $x_{\text{изм}}$ . Относительная же погрешность измерения, т.е.  $\Delta x_{\text{пр}} / x_{\text{изм}}$ , зависит от  $x_{\text{изм}}$ : чем больше  $x_{\text{изм}}$ , тем меньше относительная погрешность. Поэтому при измерениях рекомендуется выбирать такие пределы измерения, чтобы отсчеты на них производились по второй половине шкалы прибора.

2. *Погрешность округления при измерении.* При измерениях показания приборов часто лежат между делениями шкалы. Отсчеты

на глаз долей деления затруднительны. Поэтому показания приборов, как правило, округляются и возникает *погрешность округления* при измерениях.

Интервал округления может быть различным. Чаще всего это либо цена наименьшего деления шкалы  $\Delta$ , либо половина цены деления. Очевидно, *максимальная* погрешность округления равна половине интервала округления, т.е. величине  $\Delta/2$ . Действительная же погрешность меньше, и при доверительной вероятности  $\alpha$  за погрешность округления принимают величину

$$\Delta x_{\text{окр}} = \alpha \frac{\Delta}{2}. \quad (8)$$

3. *Погрешность округления при вычислениях.* Этот вид погрешности учитывается только при косвенных измерениях (об этом см. ниже).

Далее определяется *полная погрешность*, поскольку в реальных условиях присутствуют как случайные, так и систематические погрешности. По теории вероятности погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется квадратичным суммированием, т.е. полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2 + \Delta x_{\text{окр}}^2}. \quad (9)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} = \sqrt{\varepsilon_{\text{сл}}^2 + \varepsilon_{\text{пр}}^2 + \varepsilon_{\text{окр}}^2}. \quad (10)$$

При этом доверительная вероятность  $\alpha$  выбирается одинаковой для всех видов погрешностей.

Некоторые из слагаемых под знаком корня могут быть настолько малыми по сравнению с другими, что ими можно пренебречь (малыми считаются ошибки, которые не превышают 30 % от максимальной).

В заключение отметим, что количество необходимых измерений определяется соотношением приборной и случайной погрешностей. Если при повторных измерениях получается одно и то же значение, то это означает, что случайная погрешность в данном ме-

тоде измерений значительно меньше приборной и большее число измерений не изменит общей ошибки.

При значительной случайной погрешности (при повторных измерениях получаются отличные друг от друга значения) число измерений лучше выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше приборной или, по крайней мере, одного с ней порядка.

Погрешность однократного измерения можно принять равной погрешности прибора.

**Погрешности косвенных измерений.** При косвенных измерениях задача ставится так: пусть искомая величина  $z$  определяется через другие величины  $a, b, c, \dots$ , полученные при прямых измерениях:

$$z = f(a, b, c, \dots). \quad (11)$$

Необходимо найти среднее значение функции и погрешность ее измерений, т.е. найти доверительный интервал при надежности  $\alpha$ :

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta z, \quad (12)$$

а также относительную погрешность  $\varepsilon_z = \Delta z / \langle z \rangle$ .

Среднее значение функции  $\langle z \rangle$  находится путем подстановки в правую часть (11) вместо  $a, b, c, \dots$  их средних значений:

$$\langle z \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots). \quad (13)$$

Абсолютная погрешность косвенных измерений  $\Delta z$  является функцией абсолютных погрешностей прямых измерений и вычисляется по формуле

$$\Delta z = \sqrt{\Delta z_a^2 + \Delta z_b^2 + \dots} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \dots}, \quad (14)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \dots$  – частные производные функции  $f$  по переменным  $a, b, \dots$

Если величины  $a, b, c, \dots$  в функцию  $z = f(a, b, c, \dots)$  входят в виде сомножителей в той или иной степени, т.е. если

$$z = a^k \cdot b^\ell \cdot c^m, \quad (15)$$



то сначала удобно вычислить относительную погрешность

$$\varepsilon_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_a^2 + \ell^2 \varepsilon_b^2 + \dots} = \sqrt{k^2 \left( \frac{\Delta a}{\langle a \rangle} \right)^2 + \ell^2 \left( \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} \right)^2 + \dots}, \quad (16)$$

а затем абсолютную

$$\Delta z = \varepsilon_z \langle z \rangle. \quad (17)$$

Формулы для  $\Delta z$  и  $\varepsilon_z$  приводятся в справочной литературе.

### Примечания.

1. При косвенных измерениях в расчетные формулы могут входить известные физические константы (ускорение свободного падения  $g$ , скорость света в вакууме  $c$  и т.д.), числа типа  $\pi$ ,  $e$ , дробные множители  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ , ... Эти величины при вычислениях округляются. При этом, естественно, в расчет вносятся погрешности  $\Delta g$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta \pi$ ,  $\Delta e$  – погрешности округления при вычислениях, которые должны учитываться.

Принято считать, что погрешность округления приближенного числа равна половине единицы того разряда, до которого это число было округлено. Например,  $\pi = 3,14159\dots$  Если взять  $\pi = 3,1$ , то  $\Delta \pi = 0,05$ ; если взять  $\pi = 3,14$ , то  $\Delta \pi = 0,005$  и т.д. Вопрос о том, до какого разряда округлять приближенное число, решается так: относительная ошибка, вносимая округлением, должна быть того же порядка или на порядок меньше, что и максимальная из относительных ошибок других видов. Таким же образом оценивается абсолютная ошибка табличных данных. Например, в таблице указано:  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , следовательно,  $\Delta \rho = 0,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Ошибка значений универсальных постоянных часто указывается вместе с их принятыми за средние значениями, например:  $c = (299793,0 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , где  $\Delta c = 0,3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ .

2. Иногда при косвенных измерениях условия опыта при повторных наблюдениях не совпадают. В этом случае значение функции  $z$  вычисляется для каждого отдельного измерения, а доверительный интервал вычисляется через значения  $z$  так же, как при прямых измерениях (все погрешности здесь входят в одну случайную погрешность измерения  $z$ ). Величины, которые не измеряются,

а задаются (если они есть), должны быть указаны при этом с достаточно большой точностью.

### **Порядок обработки результатов измерений**

*При прямых измерениях:*

1. Вычислить среднее значение для  $n$  измерений

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Найти погрешности отдельных измерений  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ .

3. Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений и их сумму:

$$\Delta x_i^2 = (x_i - \langle x \rangle)^2, \quad \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2.$$

4. Задать надежность  $\alpha$  (для наших целей принимаем  $\alpha = 0,95$ ) и по таблице определить коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha, n}$  и  $t_{\alpha, \infty}$ .

5. Произвести оценку систематических погрешностей (приборной  $\Delta x_{\text{пр}}$  и ошибки округления при измерениях  $\Delta x_{\text{окр}} = \Delta/2$  ( $\Delta$  – цена деления прибора)) и найти полную погрешность результата измерений (полуширину доверительного интервала):

$$\Delta x = \sqrt{t_{\alpha, n}^2 \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha, \infty}}{3}\right)^2 \cdot \Delta x_{\text{пр}}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2}.$$

6. Оценить относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100 \ %.$$

7. Окончательный результат записать в следующем виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \text{ при } \alpha = \dots \ \varepsilon = \dots \ %.$$

*При косвенных измерениях:*

1. Для каждой величины, измеренной прямым способом, входящей в формулу для определения искомой величины  $z = f(a, b, c, \dots)$ , провести обработку, как указано выше. Если среди величин  $a, b, c, \dots$  есть табличные константы или числа типа  $\pi, e$ , то

при вычислениях  $\langle z \rangle$  округлять их следует так (если это возможно), чтобы вносимая при этом относительная ошибка была на порядок меньше наибольшей относительной ошибки величин, измеренных прямым способом.

Определить среднее значение искомой величины:

$$\langle z \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots).$$

3. Оценить полуширину доверительного интервала для результата косвенных измерений:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \dots},$$

где производные  $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \dots$  вычисляются при  $a = \langle a \rangle, b = \langle b \rangle, \dots$

4. Определить относительную погрешность результата

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{\langle z \rangle} \cdot 100 \% .$$

5. Если зависимость  $z$  от  $a, b, c, \dots$  имеет вид  $z = a^k \cdot b^\ell \cdot c^m$ , где  $k, \ell, m$  – любые действительные числа, то сначала следует найти *относительную* ошибку:

$$\varepsilon = \sqrt{k^2 \left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \ell^2 \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \dots},$$

а затем *абсолютную*:  $\Delta z = \varepsilon \langle z \rangle$ .

6. Окончательный результат записать в следующем виде:

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta z \text{ при } \alpha = \dots, \varepsilon = \dots \%$$

### Примечания.

1. При обработке результатов прямых измерений нужно следовать следующему правилу: численные значения всех рассчитываемых величин должны содержать на один разряд больше, чем исходные (определенные экспериментально) величины.

2. При косвенных измерениях вычисления  $\langle z \rangle$  следует производить по *правилам приближенных вычислений*:

**Правило 1.** При сложении и вычитании приближенных чисел необходимо:

а) выделить слагаемое, у которого сомнительная цифра имеет наиболее высокий разряд;

б) все остальные слагаемые округлить до следующего разряда (сохраняется одна запасная цифра);

в) произвести сложение (вычитание);

г) в результате отбросить последнюю цифру путем округления (разряд сомнительной цифры результата при этом совпадает со старшим из разрядов сомнительных цифр слагаемых).

Пример:  $5,4382 \cdot 10^5 - 2,918 \cdot 10^3 + 35,8 + 0,064$ .

В этих числах последние значащие цифры сомнительные (неверные уже отброшены). Запишем их в виде:  $543820 - 2918 + 35,8 + 0,064$ .

Видно, что у первого слагаемого сомнительная цифра 2 имеет наиболее высокий разряд (десятки). Округлив все другие числа до следующего разряда и сложив, получим:

$$543820 - 2918 + 36 + 0 = 540940 = 5,4094 \cdot 10^5.$$

**Правило 2.** При умножении (делении) приближенных чисел необходимо:

а) выделить число (числа) с наименьшим количеством значащих цифр (*значащие* – цифры отличные от нуля и нули, стоящие между ними);

б) округлить остальные числа так, чтобы в них было на одну значащую цифру больше (сохраняется одна запасная цифра), чем в числе, выделенном по п. (а);

в) перемножить (разделить) полученные числа;

г) в результате оставить столько значащих цифр, сколько их было в числе (числах) с наименьшим количеством значащих цифр.

Пример:  $\frac{2,56 \cdot 10^4 \cdot 3,055}{4,2 \cdot 10^{-4}} = \frac{2,56 \cdot 10^4 \cdot 3,06}{4,2 \cdot 10^{-4}} = 1,9 \cdot 10^8$ .

**Правило 3.** При возведении в степень, при извлечении корня в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в исходном числе.

Пример:  $\sqrt{5,076 \cdot 10^5} = 7,125 \cdot 10^2$ .

**Правило 4.** При нахождении логарифма числа мантисса логарифма должна иметь столько значащих цифр, сколько их в исходном числе.

Пример:  $\lg 77,2 = 1,888$ .

В окончательной записи *абсолютной* погрешности следует оставлять только *одну значащую цифру*. (Если этой цифрой окажется 1, то после нее сохраняют еще одну цифру.)

Среднее значение округляется до того же разряда, что и абсолютная погрешность.

Пример:  $V = (375,21 \pm 0,03) \text{ см}^3 = (3,7521 \pm 0,0003) \text{ см}^3$ ;

$I = (5,530 \pm 0,013) \text{ А}, A = (57,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$ .

### *Порядок выполнения работы*

#### **При определении диаметра $d$ цилиндра:**

1. Штангенциркулем измерить 7 раз (в разных местах и направлениях) диаметр цилиндра. Результаты занести в следующую таблицу:

№ п/п	$d_i$ , мм	$d_i - \langle d \rangle$	$(d_i - \langle d \rangle)^2$	$h_i$ , мм	$h_i - \langle h \rangle$	$(h_i - \langle h \rangle)^2$
1	23,4	-0,2	0,04	58,0	0,0	0,04
2	23,8	0,2	0,04	58,2	0,0	0
3	24,0	0,6	0,36	58,3	-0,1	0,01
4	23,3	-0,3	0,09	58,2	0,0	0
5	23,6	0,0	0	58,1	0,1	0,01
6	23,5	-0,1	0,01	58,3	-0,1	0,01
7	23,3	-0,3	0,09	58,3	-0,1	0,01
Сумма	164,9		0,63	407,6		0,08
Среднее значение	23,6			58,2		

2. Вычислить среднее значение диаметра:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i,$$

где  $n$  – число измерений,  $i$  – номер измерения.

Получим:

$$\begin{aligned} \langle d \rangle &= \frac{23,4 + 23,8 + 24,0 + 23,3 + 23,6 + 23,5 + 23,3}{7} = \\ &= \frac{164,9}{7} = 23,5571 = 23,6 \text{ мм.} \end{aligned}$$

3. Вычислить  $\Delta d_i = (d_i - \langle d \rangle)$ ,  $\Delta d_i^2$  и  $\sum_{i=1}^n \Delta d_i^2$  и записать в таб-

лицу.

Например:  $\Delta d_1 = (23,4 - 23,6) = -0,2$ ;  $\Delta d_1^2 = (-0,2)^2 = 0,04$ .

4. Задавшись надежностью  $\alpha$  (от 0,90 до 0,97), по таблице выбрать коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha,n}$  и  $t_{\alpha,\infty}$ . По ГОСТу в большинстве случаев  $\alpha = 0,95$ ,  $n = 7$ . Тогда  $t_{\alpha,n} = 2,45$ ,  $t_{\alpha,\infty} = 1,96$ .

5. Определить приборную погрешность  $\Delta d_{\text{пр}}$ . Для микрометра  $\Delta d_{\text{пр}} = \Delta/2$  ( $\Delta$  – цена деления микрометра, равная обычно 0,01 мм). Для штангенциркуля  $\Delta d_{\text{пр}} = \Delta$  ( $\Delta$  – цена деления нониуса). Если нониус штангенциркуля имеет 10 делений, то  $\Delta d_{\text{пр}} = \Delta = 0,1$  мм.

6. Вычислить абсолютную ошибку (полуширину доверительно-го интервала) в определении диаметра цилиндра:

$$\begin{aligned} \Delta d &= \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_{i=1}^n \Delta d_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \Delta d_{\text{пр}}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2}; \\ \Delta d &= \sqrt{2,45^2 \frac{0,63}{7(7-1)} + \left(\frac{1,96}{3}\right)^2 0,1^2 + \left(0,95 \frac{0,1}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{0,090 + 0,043 + 0,002} = \\ &= \sqrt{0,135} = 0,3674 = 0,4 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Отсюда  $d = (23,6 \pm 0,4)$  мм.

7. Вычислить относительную погрешность диаметра:

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} = \frac{0,4}{23,6} = 0,017 \text{ или } \varepsilon_d = 1,7 \text{ \%}.$$

### При определении высоты $h$ цилиндра:

1. Штангенциркулем измерить 7 раз (в разных местах) высоту цилиндра. Результаты записать в таблицу.

2. Вычислить среднее значение высоты:

$$\langle h \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = \frac{407,6}{7} = 58,2286 = 58,2 \text{ мм.}$$

3. Вычислить  $\Delta h_i = (h_i - \langle h \rangle)$ ,  $\Delta h_i^2$  и  $\sum_{i=1}^n \Delta h_i^2$  и записать в таблицу.

4. Выбрать коэффициенты Стьюдента. Надежность выбираем такой же:  $\alpha = 0,95$ . При  $n = 7$  коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha,n} = 2,45$ ,  $t_{\alpha,\infty} = 1,96$ .

5. При определении высоты тем же штангенциркулем приборная погрешность та же:  $\Delta h_{\text{пр}} = \Delta = 0,01$  мм.

6. Вычислить абсолютную ошибку (полуширину доверительно-го интервала) в определении высоты цилиндра:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_{i=1}^n \Delta h_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \Delta h_{\text{пр}}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2}; \\ \Delta h &= \sqrt{2,45^2 \frac{0,08}{7(7-1)} + \left(\frac{1,96}{3}\right)^2 0,01^2 + \left(0,95 \frac{0,01}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{0,011 + 0,043 + 0,002} = \\ &= \sqrt{0,056} = 0,2366 = 0,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Отсюда  $h = (58,2 \pm 0,2)$  мм.

7. Вычислить относительную погрешность высоты:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} = \frac{0,2}{58,2} = 0,003 \text{ или } \varepsilon_h = 0,3 \text{ \%}.$$

### При определении объема цилиндра:

1. Вычислить среднее значение объема цилиндра:

$$\langle V \rangle = \frac{\pi \cdot \langle d \rangle^2 \cdot \langle h \rangle}{4} = \frac{3,14 \cdot 23,6^2 \cdot 58,2}{4} = 25445,83 = 25400 \text{ мм}^3.$$

Все приближенные числа, входящие в формулу, даны с точностью до трех значащих цифр («4» – точное число). Результат должен быть округлен до трех значащих цифр:  $\langle V \rangle = 25445,83 = 25,4 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$ .

2. Вычислить относительную погрешность определения объема:

$$\varepsilon_V = \sqrt{4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_\pi^2}, \text{ где } \varepsilon_\pi = \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0,005}{3,14} = 0,0016;$$

$$\varepsilon_V = \sqrt{4 \cdot 0,017^2 + 0,003^2 + 0,0016^2} = \\ = \sqrt{0,001156 + 0,000009 + 0,000003} = \sqrt{0,001166} = 0,034$$

$$\text{или } \varepsilon_V = 3,4 \text{ \%}.$$

3. Вычислить полуширину доверительного интервала:

$$\Delta V = \varepsilon_V \cdot \langle V \rangle = 0,034 \cdot 25,4 \cdot 10^3 = 0,8363 \cdot 10^3 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Абсолютная погрешность объема округляется до одной значащей цифры – до сотен. Среднее значение объема уже округлено до сотен.

4. Результаты записать в следующем виде:

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V = (25,4 \pm 0,8) \cdot 10^3 \text{ мм}^3 \text{ при } \alpha = 0,95, \varepsilon_V = 3,4 \text{ \%}.$$

## Лабораторная работа № 2. Маятник Обербека

Цель: ознакомиться с динамическими характеристиками вращательного движения твердого тела, а также с использованием осевого закона динамики вращательного движения.

Приборы и принадлежности: маятник Обербека, секундомер, измерительная линейка, штангенциркуль.

### *Сведения из теории*

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 1.2.3. Динамика вращательного движения.

### *Описание установки и метода определения момента инерции тела*

Маятник Обербека (рисунок) представляет собой крестовину, состоящую из втулки 1, четырех спиц 2, укрепленных на одном из концов втулки. На спицах размещены грузы 3. Последние могут пе-



ремещаться вдоль спиц и закрепляться на них с помощью винтов. Другой конец втулки выполнен в виде шкива 4, на который наматывается нить-шнур. К свободному концу шнура привязан груз 5. Под влиянием этого груза маятник приходит в ускоренное вращательное движение вокруг неподвижной оси. Трение между втулкой маятника и осью практически сведено к нулю установленными на ось подшипниками. Для установки груза 5 на определенной высоте предусмотрен указатель 6.

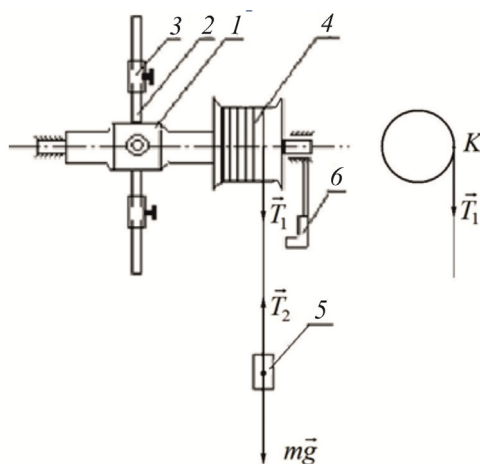


Рис.

Для установки груза 5 на определенной высоте предусмотрен указатель 6.

Исходным уравнением для определения момента инерции  $I$  маятника является основной закон динамики вращательного движения, из которого следует, что

$$I = \frac{M}{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $M$  – вращающий момент, в данном случае момент силы  $T_1$  натяжения шнура, приложенной в точке  $K$  (см. рисунок);  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника. Момент силы берется относительно оси вращения, поэтому

$$M = T_1 R, \quad (2)$$

где  $R$  – радиус шкива.

Сила  $T_1 = T_2 = T$ , она может быть найдена из второго закона Ньютона, записанного для груза 5:

$$ma = mg - T_2,$$

где  $m$  – масса груза 5;  $a$  – ускорение, с которым он опускается.

Отсюда

$$T = m(g - a). \quad (3)$$

Таким образом, подставляя (3) в (2), получим:

$$M = m(g - a) R. \quad (4)$$

Угловое ускорение  $\varepsilon$  связано с тангенциальным ускорением  $a_\tau$  точек на ободе колеса следующим соотношением:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}.$$

В свою очередь,  $a_\tau$  совпадает с ускорением  $a$ , с которым опускается груз 5. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{a}{R}. \quad (5)$$

Ускорение  $a$  можно вычислить, если измерить время  $t$  опускания груза 5 на определенную высоту  $h$ . Действительно,

$$h = \frac{at^2}{2},$$

откуда

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и (4), а затем в (1), получим:

$$I = \frac{mR^2(gt^2 - 2h)}{2h} = \frac{md^2(gt^2 - 2h)}{8h}, \quad (7)$$

где  $d$  – диаметр шкива,  $d = 2R$ .

Заметим, что второе слагаемое в выражении (7) оказывается на практике значительно меньше первого, а потому момент инерции маятника можно вычислить по формуле

$$I = \frac{md^2gt^2}{8h}. \quad (8)$$

### ***Порядок выполнения работы***

1. Внести в приведенную ниже таблицу данные о массе груза 5 и ускорении свободного падения для широты г. Перми (написаны на приборе).

2. Установить грузы 3 на концы спиц так, чтобы маятник находился в безразличном равновесии.

3. Наматывая нить на шкив, установить груз 5 так, чтобы основание груза совпало с указателем 6 (см. рисунок) (следите за тем,

чтобы витки нити на шкив наматывались в один слой, а нить наматалась бы с внешней стороны маятника). В этом положении маятник придерживайте рукой за одну из спиц.

4. Измерить время  $t_1$  опускания груза 5 с установленной высоты до пола. Для этого отпустить маятник без толчка, включив одновременно секундомер. Опыт повторить не менее 7 раз. Результаты занести в следующую таблицу:

Номер опыта	$t_1$	$t_2$	$t_{1i} - \langle t_1 \rangle$	$(t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2$	Другие данные
1					$m = \langle m \rangle \pm \Delta m$
2					$g = \dots \pm \dots$
3					$d = \dots \pm \dots$
.					$h = \dots \pm \dots$
.					$\alpha = \dots$
.					$t_{\alpha,n} = \dots$
7					$\Delta t_{\text{пр}} = \dots$
	$\Sigma t_1 =$	$\Sigma t_2 =$	$\Sigma(t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2 =$		
	$\langle t_1 \rangle =$	$\langle t_2 \rangle =$			

5. Передвинуть грузы 3 примерно на середину спиц и установить их так, чтобы маятник находился в безразличном равновесии.

По п. 4 измерить время  $t_2$  движения груза в этом случае. Результаты записать в таблицу.

6. Измерить диаметр шкива  $d$  и высоту падения груза  $h$ , оценить ошибки  $\Delta d$  и  $\Delta h$  в измерении этих величин. Данные занести в таблицу.

7. Вычислить  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$ , затем вычислить среднее значение моментов инерции  $\langle I_1 \rangle$  и  $\langle I_2 \rangle$  (для того и другого расположения грузов 3) по формуле

$$\langle I \rangle = \frac{\langle m \rangle \langle d^2 \rangle \langle g \rangle \langle t \rangle^2}{8 \langle h \rangle}.$$

8. Определить абсолютную и относительную погрешности в определении момента инерции (только для  $I_1$  или только для  $I_2$ , так как погрешности будут приблизительно одинаковыми):

а) задавшись надежностью  $\alpha = 0,95$ , выбрать коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha,n}, t_{\alpha,\infty}$ , оценить  $\Delta t_{\text{пр}}$  для секундомера;

б) вычислить абсолютную погрешность в измерении времени:

$$\Delta t_1 = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum (t_1 - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 (\Delta t_{\text{пр}})^2 + \left(\alpha \frac{\Delta t}{2}\right)^2};$$

в) вычислить относительную погрешность в определении  $I$  (например,  $I_1$ ):

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\langle m \rangle}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\langle g \rangle}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{\langle t \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2};$$

г) вычислить абсолютную погрешность:

$$\Delta I_{1(2)} = \varepsilon_I \langle I_{1(2)} \rangle;$$

д) результаты записать в виде:

$$I_1 = \langle I_1 \rangle \pm \Delta I, \quad I_2 = \langle I_2 \rangle \pm \Delta I$$

$$\text{при } \alpha = \dots, \quad \varepsilon_I = \dots \%$$

9. Сравнивая  $I_1$  и  $I_2$ , сделать вывод, касающийся связи величины момента инерции и расположения грузов  $Z$ .

### Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси, моментом инерции твердого тела относительно оси? В каких единицах измеряется момент инерции?

2. В чем состоит теорема Штейнера? Примеры ее использования.

3. Что называется моментом силы относительно оси? В каких единицах он измеряется?

4. Что такое плечо силы?

5. Что называется моментом импульса материальной точки относительно оси вращения, моментом импульса твердого тела относительно оси вращения? В каких единицах измеряется момент импульса?

6. Как связаны между собой момент импульса и момент инерции тела, вычисленные относительно оси вращения?

7. Маятник Обербека: устройство и метод определения его инерции.

8. Порядок выполнения работы и выводы по ней.

### Лабораторная работа № 3. Физический маятник

Цель: ознакомиться с методом определения моментов инерции тел.

Приборы и принадлежности: исследуемое тело (пластина), кронштейн для подвешивания тела, секундомер, линейка, математический маятник.

#### Сведения из теории

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 1.3.2. Маятники.

#### Описание установки и метода определения момента инерции тела

Исследуемое тело  $I$  представляет собой металлическую пластину с двумя вырезами (рисунок). Этими вырезами тело подвешивается на опору – кронштейн  $2$  для организации колебаний. Чтобы уменьшить трение и износ детали, точки подвеса  $O_1$  и  $O_2$  снабжены специальными подставками  $3$ . На конце кронштейна может быть подвешен математический маятник  $4$ , длину которого можно изменять.

В работе определяются моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$  относительно осей  $O_1$  и  $O_2$ . Метод определения моментов инерции основан на том, что период колебаний физического маятника (пластина в данном случае играет роль физического маятника) связан с его моментом инерции относительно оси колебания формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (1)$$

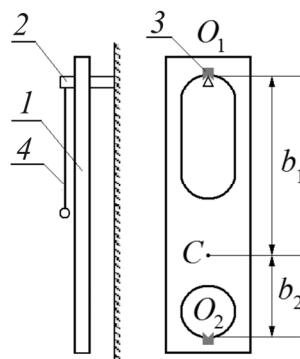


Рис.

Таким образом, измерив на опыте период колебаний маятника  $T$  и расстояние  $b$  от точки подвеса до центра масс, зная массу  $m$  маятника и ускорение свободного падения  $g$ , можно вычислить момент инерции:

$$I = \frac{T^2 mgb}{4\pi^2}. \quad (2)$$

### Порядок выполнения работы

Все данные заносятся в следующую таблицу:

№ п/п	Число полных колеба- ний $N$	Колебания на оси $O_1$		Колебания на оси $O_2$			
		$t_1$	$T_{1i}$	$t_2$	$T_{2i}$	$(T_{2i} - \langle T_2 \rangle)$	$(T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2$
1							
2							
·							
·							
7							
			$\sum T_{1i} =$		$\sum T_{2i} =$		$\sum (T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2 =$
			$\langle T_1 \rangle =$		$\langle T_2 \rangle =$		
Другие данные	$b_1 = \dots \pm \dots$		$m = \dots \pm \dots$		$\ell_{\text{пр1}} = \dots$		
	$b_2 = \dots \pm \dots$		$g = \dots \pm \dots$		$\ell_{\text{пр2}} = \dots$		

1. Снять пластину с подвеса, измерить линейкой расстояния  $b_1 = O_1C$  и  $b_2 = O_2C$  и оценить ошибку  $\Delta b$  этих измерений. Результаты занести в таблицу; сюда же вписать данные о массе тела и ускорении свободного падения.

2. Подвесить маятник на ось  $O_1$ , привести его в движение ( $\varphi \leq 8^\circ$ ) и измерить время  $t_1$  для 30–50 полных колебаний (отсчет времени лучше начинать после того, как тело совершит несколько колебаний). Опыт повторить не менее 5 раз при одном и том же числе колебаний. Результаты (эти и последующие) занести в таблицу.

3. Снять маятник и, подвесив его на ось  $O_2$ , проделать то же, что и в п. 2.

4. Вычислить  $T_1$  и  $T_2$  для каждого из опытов и их средние значения  $\langle T_1 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$ .

5. Вычислить  $\langle I_1 \rangle$  и  $\langle I_2 \rangle$  по формуле

$$\langle I \rangle = \frac{\langle T \rangle^2 \langle m \rangle \langle g \rangle \langle b \rangle}{4\pi^2}.$$

6. Для момента инерции  $I_2$  вычислить относительную  $\varepsilon_{I_2}$  и абсолютную  $\Delta I_2$  погрешности (для  $I_1$  первую из них принять такой же):

а) подсчитать:  $T_{2i} - \langle T_2 \rangle$ ,  $(T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2$ ,  $\sum_{i=1}^n (T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2$ , занести

в таблицу;

б) вычислить абсолютную погрешность в измерении периода колебаний:

$$\Delta T_2 = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_{i=1}^n (T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2}{n(n-1)} + \left( \frac{\Delta t_{\text{пр}}}{N} \cdot \frac{t_{\alpha,\infty}}{3} \right)^2},$$

где  $n$  – число измерений;  $\Delta t_{\text{пр}}$  – приборная погрешность секундомера;  $t_{\alpha,n}$  – коэффициент Стьюдента (определяется по таблице в зависимости от выбранной надежности  $\alpha$  и  $n$ );  $N$  – число полных колебаний;

в) определить относительную погрешность:

$$\varepsilon_{I_2} = \sqrt{4 \left( \frac{\Delta T_2}{\langle T_2 \rangle} \right)^2 + 4 \left( \frac{\Delta \pi}{\pi} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m}{\langle m \rangle} \right)^2 + \left( \frac{\Delta g}{g} \right)^2 + \left( \frac{\Delta b_2}{\langle b_2 \rangle} \right)^2};$$

г) вычислить абсолютную погрешность в определении  $I_1$  и  $I_2$ :

$$\Delta I_1 = \varepsilon_{I_2} \langle I_1 \rangle; \Delta I_2 = \varepsilon_{I_2} \langle I_2 \rangle.$$

7. Результаты представить в виде:

$$I_1 = \langle I_1 \rangle \pm \Delta I_1,$$

$$I_2 = \langle I_2 \rangle \pm \Delta I_2$$

при  $\alpha = \dots$ ,  $\varepsilon_I = \dots$  %.

8. Вычислить приведенные длины  $\ell_{\text{пр}1}$  и  $\ell_{\text{пр}2}$  маятников по формуле

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{\langle I \rangle}{m \langle b \rangle}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое физический маятник?
2. Уравнения колебаний физического маятника (дифференциальное уравнение и его решение).
3. Частота и период колебаний физического маятника.

4. Что называется приведенной длиной физического маятника?
5. Точка подвеса и центр качаний физического маятника.
6. Метод определения  $I$  в данной работе.
7. Порядок выполнения работы.

#### **Лабораторная работа № 4. Исследование электростатических полей**

Цель: ознакомиться с методом моделирования электростатического поля с помощью электропроводной бумаги; исследовать электростатическое поле плоского конденсатора.

Приборы и принадлежности: источник постоянного тока, вольтметр, электропроводная бумага, планшет с набором электродов, проводники, один из которых снабжен зондом.

#### *Сведения из теории*

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделах 3.1.2. Напряженность электростатического поля; 3.1.3. Энергия взаимодействия зарядов.

#### *Моделирование электрического поля и описание установки*

Для исследования электростатического поля (ЭСП), созданного зарядами в вакууме или в воздухе, нужны специальные приборы. Поэтому чаще всего для изучения поля зарядов используют его модель – поле токов в слабо проводящей среде (в нашем случае – в электропроводной бумаге), которое, как и поле зарядов, является потенциальным. При этом силовым линиям ЭСП соответствуют так называемые линии тока (линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора плотности тока в этой точке), а поверхности равного потенциала этих полей просто совпадают. Сами потенциалы могут быть измерены обычным вольтметром, снабженным проводником с зондом – изолированным металлическим стержнем с заостренным концом.

Установка (рисунок) устроена следующим образом: на планшет  $I$  укладывается электропроводная бумага  $4$ , к которой, в свою очередь, прижимаются электроды  $2$ . На эти электроды от источника постоянного тока  $3$  подается разность потенциалов, создающая электростатическое поле (и электрический ток на поверхности бумаги). С помощью зонда  $5$



и вольтметра *б* легко измерить потенциал в любой точке поля: для этого достаточно коснуться зондом той или иной точки бумаги.

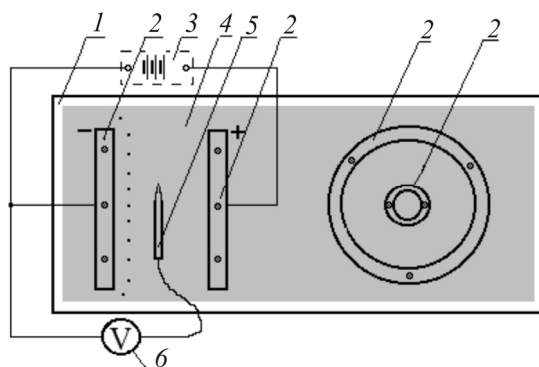


Рис.

В ходе выполнения работы необходимо решить следующие задачи:

- 1) опытным путем найти эквипотенциальные поверхности для поля плоского конденсатора;
- 2) на бумаге для указанных выше полей провести эквипотенциальные линии и линии напряженности;
- 3) вычислить величину напряженности поля плоского конденсатора; построить график зависимости потенциала от расстояния.

### ***Порядок выполнения работы***

Все данные заносятся в следующую таблицу:

Номер эквип. линии	$\varphi, \text{ В}$	$\Delta\varphi_{i1}, \text{ В}$	$\Delta r_{i1} \cdot 10^3, \text{ м}$	$E_r = \frac{\Delta\varphi_{i1}}{\Delta r_{i1}}, \text{ В/м}$	$\Delta\varphi_{i1}\Delta r_{i1} \cdot 10^3, \text{ В}\cdot\text{м}$	$\Delta r_{i1}^2 \cdot 10^6, \text{ м}^2$
1						
2						
3						
·						
·						
Сумма						
Среднее значение						

1. Путем осмотра ознакомиться с приборами и принадлежностями. Установить предел измерения вольтметра, определить цену деления прибора.

2. Закрепить два листа электропроводной бумаги на планшете темной графитовой стороной вверх, плотно прижав к ним обе пары металлических электродов. Контуры электродов обвести.

3. На прямолинейных электродах собрать электрическую цепь (см. рисунок) и после проверки подключить к источнику постоянного тока.

4. С помощью зонда проверить, на какой из электродов подан более высокий потенциал (желательно «минус» – на левый). На бумаге пометить электроды знаками «+» и «-».

5. Экспериментально найти 5–6 групп точек поля с одинаковым потенциалом в каждой группе (например, 2, 4, 6, 8, 10 и 12 В). Начать следует с точек, лежащих на расстоянии 5–10 мм от электрода со знаком «-». В каждой группе взять по 8–10 точек, в том числе во внешней для конденсатора области. Точки на бумаге отмечают прижатием зонда к бумаге. Показания вольтметра для каждой из групп ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ ) занести в таблицу.

6. Лист бумаги снять. Повернуть (хотя и не обязательно) светлой стороной вверх. Отметить положение электродов, поставив знаки «+» и «-». Точки с одинаковыми потенциалами соединить. Это и есть эквипотенциальные линии. На листе в средней части поля провести линию напряженности, которая перпендикулярна эквипотенциальным линиям.

7. В качестве опорной выбрать линию с наименьшим потенциалом  $\varphi_1$ . Вычислить разность потенциалов  $\Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_{31} = \varphi_3 - \varphi_1, \dots$  и измерить расстояния  $\Delta r_{21}, \Delta r_{31}, \dots$  между опорной и другими линиями. Все результаты занести в таблицу.

8. Вычислить напряженность поля плоского конденсатора и построить график  $\Delta\varphi_{i1} = f(\Delta r_{i1})$  в следующем порядке:

а) используя данные, полученные ранее (см. п. 7), вычислить по формуле  $E_r = \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$  значения напряженностей исследуемого поля и по ним – среднее значение  $\langle E \rangle$ ;

б) заполнить другие графы таблицы, т.е. вычислить  $\Delta\varphi_{i1} \cdot \Delta r_{i1}$ ,  $\Delta r_{i1}^2$ , а также  $\Sigma \Delta\varphi_{i1} \cdot \Delta r_{i1}$  и  $\Sigma \Delta r_{i1}^2$ ;

в) вычислить напряженность поля по формуле, следующей из метода наименьших квадратов: 
$$E = \frac{\sum (\Delta\varphi_{i1} \cdot \Delta r_{i1})}{\sum \Delta r_i^2};$$

г) сравнить результаты, полученные в пп. (а) и (б). Найти расхождение в процентах между  $\langle E \rangle$  и  $E$ , т.е. расхождение одной и той же величины, найденной разными способами, по формуле

$$\varepsilon = \frac{\langle E \rangle - E}{E} \cdot 100 \%;$$

д) начертить график зависимости разности потенциалов (потенциала) от расстояния  $\Delta\varphi_{i1} = f(\Delta r_{i1})$ . Сделать соответствующий вывод.

### Контрольные вопросы

1. Что такое ЭСП? В чем заключается его основное свойство?
2. Какими величинами характеризуют ЭСП?
3. Что называют напряженностью поля? Единицы ее измерения.
4. Что называется потенциалом данной точки поля? Единицы его измерения.
5. Каков физический смысл разности потенциалов двух точек поля?
6. Какова связь между напряженностью и потенциалом поля, между напряженностью и разностью потенциалов?
7. Как графически изображается ЭСП?
8. Что такое линии напряженности и эквипотенциальные поверхности поля? Каково их взаимное расположение (при изображении поля)?
9. Способ моделирования ЭСП в данной работе. Описание установки.

### Лабораторная работа № 5. Определение внутреннего сопротивления и ЭДС источника тока

Цель: ознакомиться с методами определения характеристик источника тока.

Приборы и принадлежности: исследуемый источник тока, «магазин сопротивлений», амперметр (лучше цифровой), ключ, проводники.

### *Сведения из теории*

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 3.2.2. Закон Ома.

#### *Способы определения внутреннего сопротивления и ЭДС источника*

Связь между  $I$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $r$  сформулирована в законе Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (1)$$

где  $R$  – внешнее,  $r$  – внутреннее сопротивления цепи.

Закон Ома для однородного участка цепи с сопротивлением  $R$  записывается так:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), можно увидеть, что

$$\frac{\mathcal{E}}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{R + r}{R}.$$

Отсюда следует, что если по цепи течет ток, то  $(\varphi_1 - \varphi_2) < \mathcal{E}$ , а при разомкнутой цепи ( $R = \infty$ )  $\mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

В данной работе для определения внутреннего сопротивления и ЭДС используются два сравнительно простых способа, основанных на простых измерениях (в замкнутой цепи) зависимости силы тока  $I$  от внешнего сопротивления  $R$ , т.е. на основе данных  $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n, \dots$  при  $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n, \dots$

*Способы:*

1. Определение по двум парам  $I$  и  $R$ . Из полученных в ходе эксперимента данных выбираются две любые пары для  $I$  и  $R$ , например,  $I_k, R_k$  и  $I_n, R_n$ . По ним сначала вычисляется внутреннее сопротивление:

$$r = \frac{I_n R_n - I_k R_k}{I_k - I_n}. \quad (3)$$

Затем определяется ЭДС по формуле

$$\mathcal{E} = I_k (R_k + r) \text{ или } \mathcal{E} = I_n (R_n + r). \quad (4)$$

Формула (3) получена после приравнивания правых частей выражений (4), следующих из (1).

2. Графический способ.

Формулу (1) запишем в «перевернутом» виде:

$$\frac{1}{I} = \frac{R+r}{\mathcal{E}},$$

или

$$\frac{1}{I} = \frac{r}{\mathcal{E}} + \frac{R}{\mathcal{E}} \quad (5)$$

Зависимость  $\frac{1}{I} = f(R)$  носит линейный характер (рис. 1). Если эту линию продолжить до точки пересечения с осями  $\frac{1}{I}$  и  $R$  (точки  $A$  и  $B$ ), то станет ясно, что отрезок  $OA$  есть не что иное, как внутреннее сопротивление источника  $r$  (точка  $A$  соответствует случаю, когда  $\frac{1}{I} = 0$ , а это может

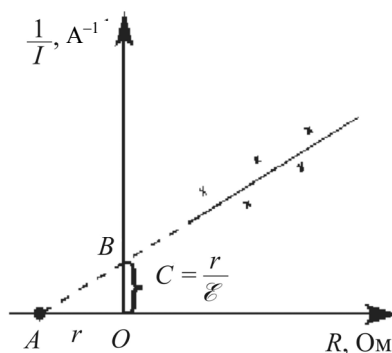


Рис. 1

быть только при  $-R = r$ ). Отрезок  $OB$  показывает значение  $\frac{r}{\mathcal{E}}$  (точка  $B$  соответствует случаю  $R = 0$ ). Обозначим это отношение через  $C$ :

$$\frac{r}{\mathcal{E}} \equiv C.$$

Тогда, зная  $r$ , легко вычислить ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{r}{C}.$$

### **Порядок выполнения работы**

1. Путем осмотра ознакомиться с приборами, предлагаемыми для выполнения работы.

2. По схеме (рис. 2) собрать электрическую цепь. В качестве  $R$  используется «магазин сопротивлений» (МС). На цифровой миллиамперметр подать его рабочее напряжение 220 В, нажать кнопку

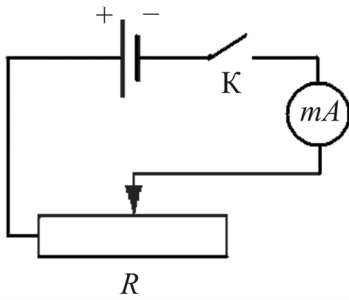


Рис. 2

диапазона (20), ключ К поставить в положение «разомкнуто».

3. Снять зависимость  $I = f(r)$ . Для этого установить на МС некоторое  $R$ , например 700 Ом, замкнуть ключ К и измерить  $I$ . Уменьшая  $R$  (скажем, на 100 Ом каждый раз), измерить  $I$ . Результаты 5–7 измерений занести в следующую таблицу:

$R_i$ , Ом	700	600	500	400	300	200	100
$I_i$ , А							
$\frac{1}{I_i}$ , А <sup>-1</sup>							

$$\langle r \rangle = \dots, \langle \mathcal{E} \rangle = \dots$$

4. Определить  $r$  и  $\mathcal{E}$  первым способом.

Из полученных в п. 3 данных выбрать любые (но не стоящие рядом) две пары  $I_k, R_k$  и  $I_n, R_n$  и по формулам (3) и (4) вычислить  $r_1$  и  $\mathcal{E}_1$ .

Эту операцию повторить не менее трех раз и вычислить средние значения  $\langle r_1 \rangle$ ,  $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$  (здесь индекс 1 означает первый способ).

5. Определить  $r$  и  $\mathcal{E}$  вторым способом.

Для каждого значения  $I$  вычислить  $\frac{1}{I}$ . Результаты занести в таблицу. Построить график зависимости  $\frac{1}{I} = f(R)$  на миллиметровой бумаге формата А4 и по предложенному выше методу (см. рис. 1) определить  $r_2$  и  $\mathcal{E}_2$  (здесь индекс 2 означает второй способ).

Сравнить  $\langle r_1 \rangle$  и  $\langle r_2 \rangle = r_2$ ,  $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}_2 \rangle = \mathcal{E}_2$ , вычислив расхождения результатов, полученных первым и вторым способами:

$$\delta_r = \frac{|\langle r_1 \rangle - \langle r_2 \rangle|}{r_1} \cdot 100 \%, \quad \delta_{\mathcal{E}} = \frac{|\langle \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_2 \rangle|}{\mathcal{E}_1} \cdot 100 \%$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое электрический ток?
2. Что называется силой тока, плотностью тока?
3. Что такое ЭДС источника тока, сторонние силы?
4. Закон Ома для замкнутой цепи.

5. В чем состоит экспериментальная часть в данной работе?
6. Какими способами можно определить  $r$  и  $\mathcal{E}$ ?

### Лабораторная работа № 6. Определение магнитной индукции в межполюсном зазоре прибора магнитоэлектрической системы

Цель: ознакомиться с принципом действия измерительного прибора магнитоэлектрической системы, определить величину индукции магнитного поля в межполюсном зазоре прибора, исследовать графически зависимость угла поворота рамки прибора от силы тока в ней.

Приборы и принадлежности: амперметр магнитоэлектрической системы, шкала которого специально для данной работы проградуирована в градусах; два реостата; амперметр или прибор комбинированный типа Ф4313, Ц4315, Ц317 для измерения тока, напряжения и сопротивления.

#### Сведения из теории

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделах 3.3.1. Основные свойства магнитного поля; 3.3.2. Закон Ампера. Сила Лоренца.

#### Принцип действия прибора магнитоэлектрической системы

Устройство прибора магнитоэлектрической системы, который может служить для измерения тока, напряжения и т.п., показано на рис. 1. Полюсные наконечники постоянного магнита имеют цилиндрическую расточку, в которой по оси установлен стальной сердечник. Между полюсами и сердечником образуется зазор с радиальным магнитным полем, индукция которого одинакова по величине во всех точках зазора (рис. 2). Рамка (см. рис. 1), укрепленная на оси, может вращаться в межполюсном зазоре. При вращении две ее стороны (на рис. 2 они перпендикулярны) постоянно пересекают радиальное магнитное поле в зазоре.

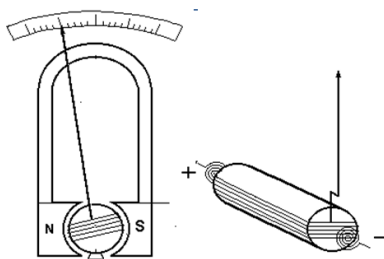


Рис. 1

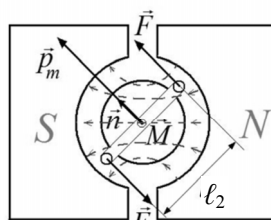


Рис. 2

Для уменьшения трения ось рамки оканчивается стальными кернами, опирающимися на подпятники, изготовленные из агата, рубина или корунда. С осью жестко связана стрелка прибора. При включении прибора в электрическую цепь ток проходит по виткам рамки. При этом на каждую сторону рамки, расположенную в магнитном поле зазора, действует сила  $\vec{F}$ . С учетом числа витков рамки  $k$  согласно закону Ампера имеем:

$$F = k B I \ell_1, \quad (1)$$

где  $B$  – величина магнитной индукции в зазоре;  $I$  – сила тока в рамке;  $\ell_1$  – длина той стороны рамки, которая расположена в зазоре; направление силы  $F$  определяется правилом левой руки. Каждая из сил  $\vec{F}$  создает вращающий момент рамки, равный  $M_1 = k B I \ell_1 \cdot \frac{\ell_2}{2}$ ,

где  $\ell_2$  – длина стороны рамки, не помещенной в зазор.

Направление вектора  $\vec{M}_1$  можно определить по правилу правого винта: если вращать винт так, как вращает рамку приложенная сила, то поступательное движение винта указывает направление вектора  $\vec{M}_1$ . На рис. 2  $\vec{M}_1$  направлен по оси вращения рамки к нам и обозначен точкой.

Момент пары сил, приложенных к рамке,

$$M = k B I \ell_1 \ell_2 = k B I S, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь рамки;  $\ell_2$  – длина второй стороны рамки.

Величину  $k I S$  обозначают  $p_m$  и называют *магнитным моментом рамки*. Эту величину вводят как вектор и направляют по положительной нормали к рамке с током. Следовательно,  $\vec{p}_m = k I S \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор вдоль положительной нормали к рамке.

С введением вектора  $\vec{p}_m$  выражение (2) можно записать в векторной форме:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad (3)$$

где  $\vec{B}$  – магнитная индукция в тех местах зазора, где расположена рамка.



Используя закон Ампера, нетрудно показать, что формула (3) справедлива также в случае, когда рамка с током расположена в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

При изменении направления тока в рамке направление каждой из сил  $\vec{F}$  изменится на противоположное и, следовательно, стрелка будет отклоняться в другую сторону от положения равновесия. Поэтому магнитоэлектрический измерительный механизм пригоден только в цепях постоянного тока.

Для компенсации момента  $\vec{M}$  служат пружины, скрепленные одним концом с осью рамки. При повороте рамки пружины создают момент сил упругости, пропорциональный углу поворота рамки  $\varphi$ :

$$N = C \varphi, \quad (4)$$

здесь  $C$  – жесткость пружины. Момент  $\vec{N}$  всегда направлен противоположно вращающему моменту  $\vec{M}$ .

Пока угол поворота  $\varphi$  мал ( $|\vec{M}| > |\vec{N}|$ ), рамка продолжает вращаться под действием результирующего момента  $(M - N)$ . При этом угол  $\varphi$  увеличивается, и вместе с ним увеличивается  $N$ . Это происходит до тех пор, пока момент сил упругости пружин  $N$  не станет равным вращающему моменту  $M$ . Следовательно, угол, соответствующий установившемуся положению равновесия рамки, будет удовлетворять, согласно (2) и (4), равенству

$$C \varphi = k B I S. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что угол поворота рамки пропорционален току в ней. Поэтому шкала прибора магнитоэлектрической системы равномерная.

По формуле (5) индукция магнитного поля в зазоре

$$B = \frac{C \varphi}{k I S}, \quad (6)$$

что позволяет определить ее опытным путем, если измерить каким-либо образом величины  $C$ ,  $\varphi$ ,  $k$ ,  $S$ .

### ***Порядок выполнения работы***

1. Изучить принцип действия прибора магнитоэлектрической системы.

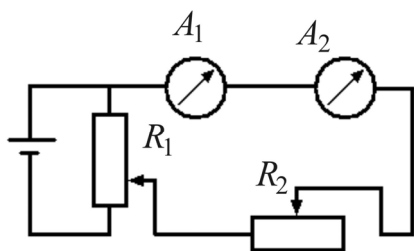


Рис. 3

2. Собрать электрическую схему (рис. 3), включающую амперметр магнитоэлектрической системы  $A_1$ , шкала которого проградуирована в градусах для измерения магнитной индукции в зазоре прибора; амперметр  $A_2$  для измерения силы тока в цепи.

3. Определить индукцию магнитного поля в межполюсном зазоре прибора магнитоэлектрической системы:

а) изменяя ток с помощью реостатов  $R_1$  и  $R_2$ , снять 7–10 показаний приборов  $A_1$  и  $A_2$ . При этом показания прибора  $A_1$  должны быть сняты в пределах всей шкалы, т.е. от 0 до  $90^\circ$ ;

б) результаты измерений занести в табл. 1. По формуле (6) для каждой пары  $I$  и  $\varphi$  определить  $B_i$ , затем  $\langle B \rangle$ . Необходимые данные о приборе  $A_1$  взять из табл. 2;

Таблица 1

№ п/п	$I$ , А	$\varphi$ , град	$B_i$ , Тл	$ \langle B \rangle - B_i $	$ \langle B \rangle - B_i ^2$
1					
2					
...					
7					
Сумма					
Среднее значение					

Таблица 2

№ п/п	Инвентарный номер прибора	$C \cdot 10^8$ , Н·м/град	$S \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup>	$k$
1	078 426	33	418	15
2	179 251	37	418	15
3	241 392	29	418	15
4	054 851	28	418	15
5	033 077	20	350	20
6	214 273	24	350	20

№ п/п	Инвентарный номер прибора	$C \cdot 10^8$ , Н·м/град	$S \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup>	$k$
7	016 776	24	350	20
8	074 495	18	350	20
9	093 837	21	350	20
10	063 121	36	536	10
11	085 207	35	536	16
12	103 059	19	536	12
13	007 636	34	536	10
14	096 794	34	536	16
15	162 950	33	536	12
16	411 841	45	532	10

в) вычислить полуширину доверительного интервала:

$$\Delta B = t_{\alpha}(n) \sqrt{\frac{\sum_i |\langle B \rangle - B_i|^2}{n(n-1)}}.$$

Результат записать в следующем виде:

$$B = \langle B \rangle \pm \Delta B \text{ при } \alpha = \dots, \varepsilon_B = \frac{\Delta B}{\langle B \rangle} \cdot 100 \%.$$

4. Построить график зависимости  $\varphi = f(I)$ . Анализируя график, сделать выводы относительно шкалы прибора и индукции магнитного поля в межполюсном зазоре прибора.

### Контрольные вопросы

1. Чем создается и как обнаруживается магнитное поле?
2. Как направлен вектор индукции магнитного поля?
3. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (закон Ампера).
4. Индукция магнитного поля (физический смысл индукции магнитного поля), единицы ее измерения в СИ.
5. Принцип действия прибора магнитоэлектрической системы.
6. Вывод расчетной формулы для определения магнитного поля в воздушном зазоре прибора.

## Лабораторная работа № 7. Определение длины волны света с помощью бипризмы Френеля

Цель: ознакомиться с одним из методов наблюдения интерференции света. Определить длину волны света, излучаемого лазером.

Приборы и принадлежности: полупроводниковый лазер, оптическая скамья с набором рейтеров, бипризма Френеля, короткофокусная линза, экран для наблюдения с магнитными шайбами для крепления бумаги, линейка, карандаш, штангенциркуль.

### Сведения из теории

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 4.2.2. Интерференция света.

### Метод определения длины волны с помощью бипризмы Френеля

Из расчета результата интерференции от двух когерентных источников на примере метода Юнга (рис.1) получаем:

$$\Delta x = \frac{\lambda \ell}{d}, \quad (1)$$

где  $d$  – расстояние между источниками;  $\Delta x$  – расстояние между интерференционными максимумами;  $\ell$  – расстояние от источников до экрана.

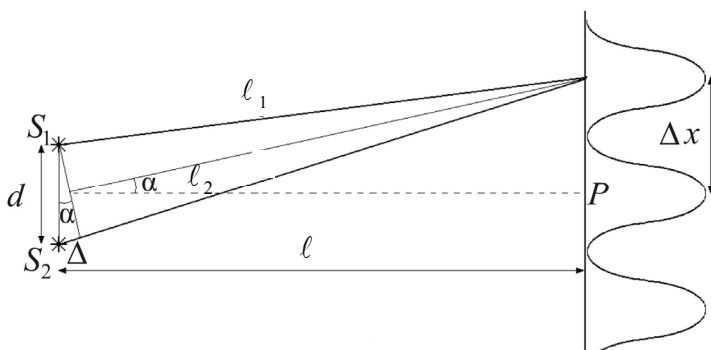


Рис. 1

Для получения когерентных источников световую волну делят на части. Полученные таким образом источники волн являются когерентными. Одним из способов деления волны на две коге-

рентные части является бипризма Френеля, состоящая из двух сложенных своими основаниями стеклянных призм с малыми преломляющими углами.

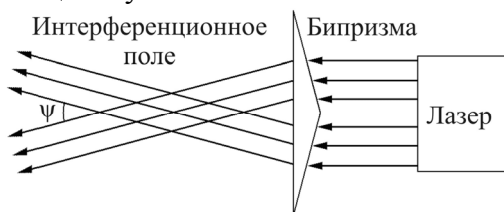


Рис. 2

Источником света в рассматриваемом случае является лазер, создающий практически параллельный пучок лучей. Призма отклоняет лучи в разных направлениях, и

таким образом возникают два пересекающихся пучка параллельных лучей, при наложении которых возникает интерференционная картина, состоящая из системы темных и светлых полос, параллельных ребру призмы (рис. 2).

Размеры интерференционной области малы. Чтобы сделать ее наблюдение возможным, на некотором расстоянии от нее по направлению лучей располагают собирающую линзу. Пересекающиеся лучи, пройдя через линзу, сходятся в фокальной плоскости и образуют два мнимых источника  $S_1$  и  $S_2$ , которые и создают интерференционную картину, наблюдаемую на экране (рис. 3).

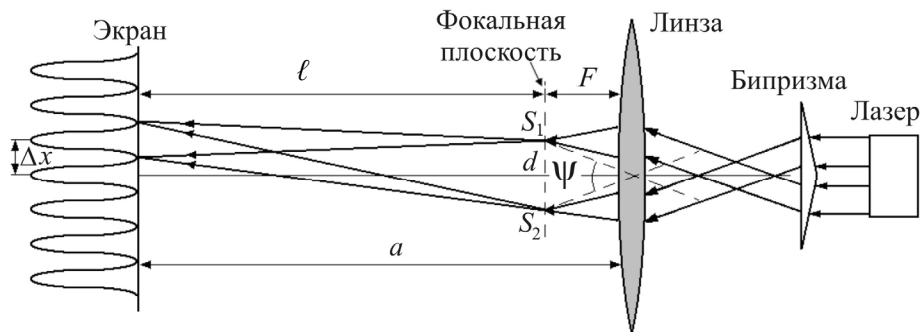


Рис. 3

Если угол  $\psi$  мал, то расстояние  $d$  между источниками  $S_1$  и  $S_2$  равно  $F \cdot \psi$ . Поскольку расстояние от источников до экрана  $\ell = a - F$ , то в соответствии с формулой (1) длина волны излучения, создаваемого лазером,

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot F \cdot \psi}{a - F}. \quad (2)$$

### Порядок выполнения работы

1. Измерить фокус линзы  $F$ . Для этого установить на оптической скамье лазер, линзу и экран (рис. 4). Включить лазер. Перемещая экран, найти такое его положение, при котором сечение светового луча было бы минимальным. В этом случае расстояние между линзой и экраном является фокусным расстоянием линзы  $F$ . Результаты измерения  $F$  записать в табл. 1.

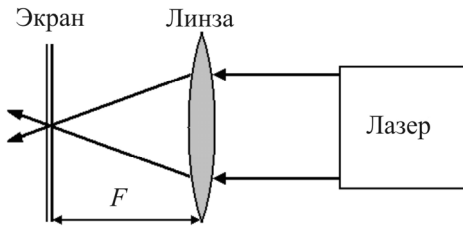


Рис. 4

Таблица 1

№ п/п	$F$ , мм
Сред. значение	

2. Определить угол пересечения лучей, прошедших бипризму Френеля (угол  $\psi$ ). Для измерения угла  $\psi$  нужно установить рядом с лазером бипризму и на максимальном удалении от нее экран (рис. 5). Включить лазер и проследить, чтобы его луч попадал на ребро бипризмы.

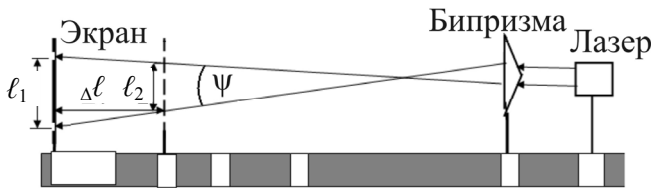


Рис. 5

Измерить штангенциркулем расстояние  $l_1$  между световыми пятнами, которые наблюдаются на экране. Затем сместить экран на расстояние  $\Delta l$  и вновь измерить расстояние между световыми пятнами  $l_2$ . Считая угол  $\psi$  малым, найти его величину по формуле

$$\psi = \frac{l_1 - l_2}{\Delta l}. \quad (3)$$

Измерение повторить пять раз. Результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

№ п/п	$\ell_1$ , мм	$\ell_2$ , мм	$\Delta \ell$ , мм	$\psi = \frac{\ell_1 - \ell_2}{\Delta \ell}$ , рад
				$\langle \psi \rangle =$

3. Установить линзу так, как показано на рис. 6, повернув ее патрубком к призме. Экран установить на возможно большем удалении от линзы и закрепить на нем лист миллиметровой бумаги. Наблюдать на экране интерференционные полосы. Измерить расстояние  $a$  между линзой и экраном.

4. Измерить расстояние между соседними интерференционными полосами. Для этого сосчитать число полос  $n$ , приходящихся на некоторую длину  $b$  миллиметровой бумаги (1–2 см). Тогда  $\Delta x = b/n$ . Результаты занести в табл. 3.

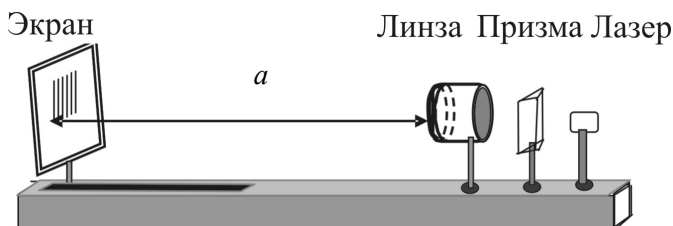


Рис. 6

Таблица 3

№ п/п	$a$ , мм	$b$ , мм	$n$	$\Delta x$ , мм	$\lambda$ , нм

Фокус линзы  $F = \dots$ ; угол между лучами, выходящими из би-призмы Френеля,  $\psi = \dots$ ;  $\langle \lambda \rangle = \dots$

5. Принимая во внимание формулы (2) и (3), вычислить длину волны:

$$\lambda = \frac{(\ell_1 - \ell_2) \cdot F \cdot \Delta x}{\Delta \ell \cdot (a - F)} = \frac{\psi \cdot F \cdot \Delta x}{(a - F)}.$$

6. Изменяя положение экрана, повторить пп. 4 и 5 пять раз. Результаты записать в табл. 3. Рассчитать погрешность полученных результатов.

### **Контрольные вопросы**

1. В чем сущность явления интерференции волн?
2. Особенность получения когерентных источников в оптике.
3. Условия возникновения максимумов и минимумов освещенности при интерференции.
4. Ход лучей в бипризме.
5. Вывод расчетной формулы для длины световой волны.

### **Лабораторная работа № 8. Изучение явления дифракции света с помощью дифракционной решетки**

Цель: изучить явление дифракции в монохроматическом свете при помощи дифракционной решетки и щели.

Приборы и принадлежности: лазер, дифракционная решетка (или щель), измерительная линейка и экран.

#### ***Сведения из теории***

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 4.2.3. Дифракция.

#### ***Описание установки***

Экспериментальная установка (рис. 1) включает в себя оптическую скамью 1, источник света (лазер) 2, рейтер 3 для установки дифракционной решетки (или щели) 4; рейтер 5 для установки экрана 6.

Поскольку в нашем случае в качестве источника света используется лазер, дающий когерентный строго параллельный малого сечения пучок света, то в установку нет необходимости вводить линзы, которые обычно ставят впереди и позади дифракционной решетки.



Дифракционная картина получается четкой и при сравнительно небольшом расстоянии от экрана до дифракционной решетки.

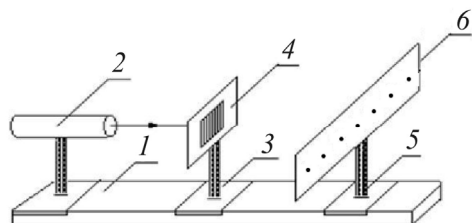


Рис. 1

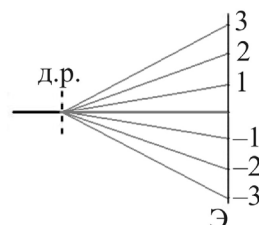


Рис. 2

На рис. 2 показаны дифракционная решетка (д.р.), экран (Э) и лучи (сплошные линии), дающие на экране в результате интерференции максимумы.

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с установкой.
2. Дифракционную решетку вставить в рамку рейтера 3.
3. Включить лазер в сеть.
4. Направить луч лазера на дифракционную решетку и, передвигая вдоль скамьи рейтер 3, установить его в таком месте, чтобы дифракционная картина была четкой и, по возможности, занимала большую часть шкалы.

5. По шкале произвести отсчет координат  $x_{\text{л}}$  и  $x_{\text{п}}$  одномерных максимумов всех порядков слева и справа от нулевого максимума. Результаты занести в следующую таблицу:

Порядок максимумов	$x_{\text{п}}$	$x_{\text{л}}$	$\ell_k = x_{\text{п}} - x_{\text{л}}$	$\text{tg } \varphi_k = \frac{\ell_k}{2\ell}$	$\varphi_k$	$\sin \varphi_k$	$\lambda = \frac{d \sin \varphi_k}{k}$
1							
.							
.							
5							

Постоянная решетки  $d = \dots$ , расстояние между решеткой и экраном  $\ell = \dots$

6. Измерить с помощью линейки расстояние  $\ell$  между дифракционной решеткой и плоскостью экрана. Выписать с дифракционной решетки значение постоянной решетки  $d$ .

7. Вычислить расстояние  $\ell_k$  между максимумами каждого порядка, а также  $\operatorname{tg} \varphi_k$ . Найти  $\varphi_k$  и  $\sin \varphi_k$ . Результаты занести в таблицу.

8. По формуле  $\lambda = \frac{d \sin \varphi_k}{k}$  вычислить длину волны  $\lambda$  лазерного луча по данным для каждого порядка максимумов и среднее значение длины волны  $\langle \lambda \rangle$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое дифракция света?
2. Принцип Гюйгенса – Френеля.
3. Метод зон Френеля.
4. Дифракция света на одной щели. Условия максимума и минимума.
5. Как выглядит дифракционная картина от дифракционной решетки? Условия максимума. Как меняется картина с увеличением числа щелей?
6. Сравнение дифракционных картин от решетки в монохроматическом и белом свете.
7. Какими величинами характеризуют качество дифракционной решетки?
8. Что такое угловая (линейная) дисперсия дифракционной решетки? Как ее вычислить?
9. С чем связана необходимость введения разрешающей способности дифракционной решетки? Что это такое?

### Лабораторная работа № 9. Исследование фотоэлементов

Цель: снять вольт-амперную и люкс-амперную характеристики вакуумного фотоэлемента и фотосопротивления.

Приборы и принадлежности: оптическая скамья, вакуумный фотоэлемент СЦВ-4, фотосопротивление, вольтметр, миллиамперметр, выпрямитель, источник света.

### Сведения из теории

Теоретические сведения для данной лабораторной работы изложены в разделе 4.3.2. Фотоэффект.

## Фотоэлемент с внешним фотоэффектом и его характеристики

Вакуумный фотоэлемент представляет собой откачанный стеклянный баллон, часть внутренней поверхности которого покрыта тонким слоем светочувствительного металла, играющего роль фотокатода К. Анод А находится в центре баллона (рис. 1).

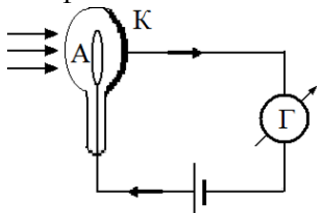


Рис. 1

При освещении фотоэлемента из катода вылетают электроны и под действием электрического поля попадают на анод. По цепи идет ток.

Вольт-амперной характеристикой фотоэлемента называется кривая, выражающая зависимость фототока от напряжения.

На рис. 2 показана вольт-амперная характеристика вакуумного фотоэлемента. Она отличается двумя особенностями:

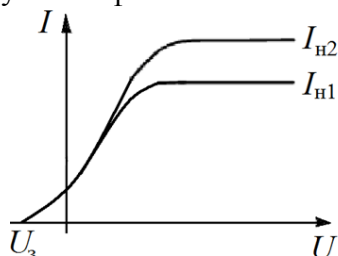


Рис. 2

а) при увеличении напряжения  $U$  между анодом и катодом фототок  $I_{\phi}$  достигает насыщения (с увеличением освещенности ток насыщения  $I_{н}$  возрастает);

б) существует такое значение задерживающей разности потенциалов  $U_3$ , при котором фототок прекращается.

Электроны перестают достигать анода, когда работа задерживающего электрического поля становится равной их начальной кинетической энергии:

$$eU_3 = \frac{mv^2}{2},$$

где  $e$ ,  $m$  и  $v$  — заряд, масса и скорость электрона соответственно.

Люкс-амперной (или световой) характеристикой фотоэлемента называется зависимость фототока от освещенности катода при постоянном напряжении. У вакуумных фотоэлементов световая характеристика линейна, так как число выбитых электронов в единицу времени  $n$  пропорционально освещенности ( $I_{н} = e n \sim E_{осв}$ ).

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с имеющимися на лабораторном столе приборами.

2. Снять вольт-амперную характеристику вакуумного фотоэлемента (СЦВ-4):

а) поместив фотоэлемент СЦВ-4 на оптическую скамью, собрать электрическую цепь по рис. 3;

б) подать напряжение сети на выпрямитель и источник света.

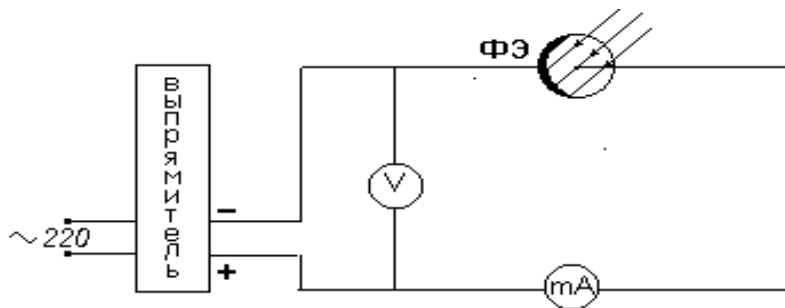


Рис. 3

Изменяя напряжение  $U$ , подаваемое на фотоэлемент, от 0 до 120–150 В, установить зависимость (7–10 точек) силы фототока  $I_{\phi}$  от напряжения для двух расстояний  $r_1$  и  $r_2$  фотоэлемента от источника света. Результаты измерений занести в табл. 1.

Таблица 1

Номер измерения	$U, \text{В}$	$I_{\phi}, \text{А}$	
		$r_1 =$	$r_2 =$
1			
.			
.			
7			

Расстояния  $r_1$  и  $r_2$  необходимо подбирать такими, чтобы шкала миллиамперметра использовалась как можно полнее. Фототок можно измерять в относительных единицах (в делениях шкалы прибора).

По полученным данным построить графики  $I_{\phi} = f(U)$ .

3. Снять люкс-амперную характеристику:

а) при постоянном напряжении ( $U = \text{const}$ ) установить зависимость силы фототока  $I_{\phi}$  от освещенности  $E_{\text{осв}}$  фотоэлемента; поскольку освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния:

ния:  $E_{\text{осв}} \approx \frac{1}{r^2}$ , то изменять ее можно путем изменения  $r$ ;

б) результаты измерений занести в табл. 2.

Таблица 2

Номер измерения	$r$	$I_{\phi}, \text{A}$	$E_{\text{осв}} = 1/r^2$
1			
.			
.			
7			

Постоянное напряжение  $U = \dots$

Постоянное напряжение должно быть подобрано так, чтобы  $r$  можно было менять в широких пределах.

По данным табл. 2 построить график  $I_{\phi} = f(E_{\text{осв}}) = f(1/r^2)$ .

### Контрольные вопросы

1. Понятие о квантовых свойствах света. Энергия кванта света.
2. Что такое внешний фотоэффект и каковы его закономерности?
3. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта, его физический смысл.
4. Красная граница фотоэффекта.
5. Объяснение закономерностей фотоэффекта на основе квантовой природы света.
6. Вольт-амперные и люкс-амперные характеристики вакуумного и газонаполненного фотоэлементов.
7. Зависимость тока насыщения фотоэлементов от освещенности.
8. Задерживающая разность потенциалов и ее связь с кинетической энергией электрона, вылетевшего из катода в результате фотоэффекта.
9. Зависимость проводимости фотосопротивления от освещенности.
10. Вольт-амперная и люкс-амперная характеристики фотосопротивления.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 718 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие / Т.И. Трофимова. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 542 с.
3. Чертов А.Г. Задачник по физике для втузов / А.Г.Чертов. – 4-е изд., испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2003. – 640 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие / В.С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М.: Наука: Физматлит, 2003. – 328 с.
5. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 591 с.
6. Демков В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.
7. Новодворская Е.М. Сборник задач по физике с решениями для втузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 2003. – 368 с.
8. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения: пособие для учителя / В.А. Балаш. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1983. – 432 с.
9. Барков Ю.А. Вступительный экзамен по физике в ПГТУ. Краткая теория и методика решения задач, типовые задания из банка данных, тесты 2004 года / Ю.А. Барков, О.М. Зверев, А.Ю. Силуянов; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2004. – 214 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ И ТАБЛИЦЫ

Таблица П.1

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	$g$	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /(кг·с <sup>2</sup> )
Число Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Скорость света в вакууме	$c$	$3 \cdot 10^8$ м/с
Элементарный заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Приведенная постоянная Планка	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R$	$3,29 \cdot 10^{15}$ с <sup>-1</sup>
	$R'$	$1,1 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> )
Постоянная закона смещения Вина	$b$	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К

Таблица П.2

Некоторые внесистемные единицы измерения

Название	Обозначение	Значение в СИ
Калория	кал	4,19 Дж
Киловатт-час	кВт·ч	$3,6 \cdot 10^6$ Дж
Миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	133 Па
Ангстрем	Å	$10^{-10}$ м
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электронвольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Таблица П.3

Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг

## Окончание табл. П.3

Наименование	Значение
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м

Таблица П.4

## Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура плавления, °С	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, 10 <sup>5</sup> Дж/кг
Алюминий	2600	659	896	3,22
Железо	7900	1530	500	2,72
Латунь	8400	900	386	–
Лед	900	0	2100	3,35
Медь	8600	1100	395	1,76
Олово	7200	232	230	0,586
Платина	21400	1770	117	1,13
Пробка	200	–	2050	–
Свинец	11300	327	126	0,226
Серебро	10500	960	234	0,88
Сталь	7700	1300	460	–
Цинк	7000	420	391	1,17

Таблица П.5

## Свойства некоторых жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Удельная теплоемкость при 20°С, Дж/(кг·К)
Бензол	880	1720
Вода	1000	4190
Глицерин	1200	2430
Касторовое масло	900	1800
Керосин	800	2140
Ртуть	13600	138
Спирт	900	2510



Таблица П.6

## Свойства некоторых газов

Газ	Молярная масса, $10^{-3}$ кг/моль	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Эффективный диаметр молекулы, нм
Азот	28	1,25	0,38
Аргон	40	1,78	0,35
Водород	2	0,09	0,28
Воздух	29	1,29	0,35
Гелий	4	0,18	0,22
Кислород	32	1,43	0,36
Углекислый газ	44	1,98	0,4

Таблица П.7

## Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Диэлектрик	Значение	Диэлектрик	Значение	Диэлектрик	Значение
Вода	81	Парафин	2	Стекло	6
Воск	7,8	Плексиглас	3,5	Фарфор	6
Керосин	2	Полиэтилен	2,3	Эбонит	2,6
Масло	5	Слюда	6		

Таблица П.8

## Удельное сопротивление проводников (при 0° С), мкОм·м

Проводник	Значение	Проводник	Значение
Алюминий	0,025	Нихром	100
Графит	0,039	Ртуть	0,94
Железо	0,087	Свинец	0,22
Медь	0,017	Сталь	0,1

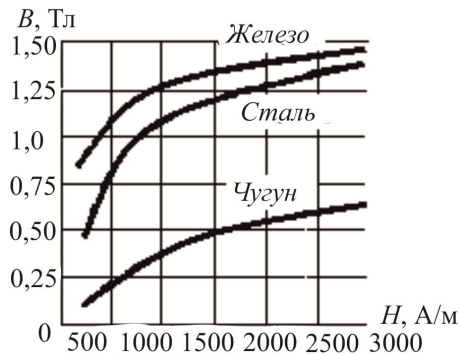


Рис. П.1. Зависимость магнитной индукции от напряженности

Таблица П.9

## Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Лед	1,31
Вода	1,33	Скипидар	1,47
Глицерин	1,47	Спирт	1,36
Кварц	1,54	Стекло	1,50

Таблица П.10

## Работа выхода электронов

Металл	Работа выхода	
	$10^{-19}$ Дж	эВ
Вольфрам	7,2	4,5
Железо	6,9	4,3
Золото	7,4	4,6
Калий	3,5	2,2
Литий	3,7	2,3
Натрий	4,0	2,5
Серебро	7,5	4,7
Цинк	6,4	4,0

Таблица П.11

## Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	Масса		Энергия	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
$\alpha$ -Частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
Нейтрон	$1,67 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Протон	$1,67 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511

Таблица П.12

## Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	10 сут.
Йод	$^{131}_{53}\text{I}$	8 сут.
Кальций	$^{45}_{20}\text{Ca}$	164 сут.

## Окончание табл. П12

Изотоп	Символ	Период полураспада
Кобальт	${}^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 года
Полоний	${}^{210}_{84}\text{Po}$	138 сут.
Радий	${}^{226}_{88}\text{Ra}$	1620 лет
Радон	${}^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут.
Стронций	${}^{90}_{38}\text{Sr}$	28 лет
Торий	${}^{229}_{90}\text{Th}$	7000 лет
Уран	${}^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	${}^{32}_{15}\text{P}$	14,3 сут.

Таблица П.13

## Массы изотопов, а.е.м.

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
${}^1_0n$	1,00867	${}^{14}_6\text{C}$	14,00324	${}^{41}_{16}\text{K}$	40,96184
${}^1_1\text{H}$	1,00783	${}^{13}_7\text{N}$	13,00574	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	39,97542
${}^2_1\text{H}$	2,01410	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307	${}^{44}_{20}\text{Ca}$	43,95549
${}^3_1\text{H}$	3,01605	${}^{15}_7\text{N}$	15,00011	${}^{54}_{26}\text{Fe}$	53,95600
${}^3_2\text{He}$	3,01602	${}^{16}_8\text{O}$	15,99491	${}^{56}_{27}\text{Co}$	55,95769
${}^4_2\text{He}$	4,00260	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913	${}^{63}_{29}\text{Cu}$	62,94962
${}^6_3\text{Li}$	6,01513	${}^{18}_8\text{O}$	17,99916	${}^{113}_{48}\text{Cd}$	112,94206
${}^7_3\text{Li}$	7,01601	${}^{20}_{10}\text{Ne}$	20,18300	${}^{127}_{53}\text{I}$	126,90435
${}^7_4\text{Be}$	7,01693	${}^{22}_{10}\text{Na}$	21,99444	${}^{137}_{55}\text{Cs}$	136,90682
${}^8_4\text{Be}$	8,00531	${}^{23}_{10}\text{Na}$	22,98977	${}^{200}_{80}\text{Hg}$	200,02800
${}^9_4\text{Be}$	9,01218	${}^{23}_{12}\text{Mg}$	22,99414	${}^{206}_{82}\text{Pb}$	205,97446
${}^{10}_4\text{Be}$	10,01354	${}^{27}_{13}\text{Al}$	26,98154	${}^{210}_{84}\text{Po}$	209,98297
${}^{10}_5\text{B}$	10,01294	${}^{30}_{13}\text{Al}$	29,99817	${}^{235}_{92}\text{U}$	235,11750
${}^{11}_5\text{B}$	11,00931	${}^{30}_{14}\text{Si}$	29,98325	${}^{238}_{92}\text{U}$	238,12376
${}^{12}_6\text{C}$	12,00000	${}^{31}_{14}\text{Si}$	30,97535		
${}^{13}_6\text{C}$	13,00335	${}^{31}_{15}\text{P}$	30,97376		

Таблица П.14

Множители и приставки для образования  
десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пэта	П	$10^{15}$	санци	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	милли	м	$10^{-3}$
гига	Г	$10^9$	микро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кило	к	$10^3$	пико	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

Таблица П.15

Предельные приборные погрешности некоторых приборов

№ п/п	Приборы	Значение меры	$\Delta x_{\text{пр}}$
1	Линейка металлическая	150... 500 мм	0,1 мм
2	Линейка деревянная	200... 500 мм	0,5 мм
3	Линейка пластмассовая	200... 300 мм	1 мм
4	Гири обычные	1, 2, 3 г	6, 8, 12 мг
5	Штангенциркули с ценой деления: 0,1 мм 0,005 мм	0–155 мм 0–250 мм	0,1 мм 0,05 мм
6	Микрометры с ценой деления 0,01 мм	0–50 мм	4 мкм
7	Весы лабораторные	до 200 г	3 минимальных деления шкалы
8	Секундомеры механические и электрические	до 30 мин	1 минимальное деление шкалы за 1 оборот секундной (большой) стрелки
9	Термометры стеклянные жидкостные	до 100 °С	Цена минимального деления шкалы, если оно равно 1, 2, 5 °С, и удвоенная цена деления, если оно равно 0,2; 0,5 °С

Таблица П.16

## Коэффициенты Стьюдента

Число измерений	Надежность $\alpha$		
	0,90	0,95	0,98
2	6,31	12,7	31,82
3	2,92	4,30	6,96
4	2,35	3,18	4,54
5	2,13	2,76	3,75
6	2,02	2,57	3,36
7	1,94	2,45	3,14
8	1,89	2,36	3,00
9	1,86	2,31	2,90
10	1,83	2,26	2,82
$\infty$	1,65	1,96	2,34

Таблица П.17

## Основные величины и единицы СИ

Физическая величина	Единица измерения	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила тока	Ампер	А
Температура	Кельвин	К
Количество вещества	моль	моль
Сила света	кандела	кд

Таблица П.18

Производные величины и единицы,  
имеющие специальное наименование

Физическая величина	Единица измерения	
	Наименование	Обозначение
Частота	Герц	Гц
Сила	Ньютон	Н
Давление	Паскаль	Па
Энергия	Джоуль	Дж
Мощность	Ватт	Вт
Заряд (кол-во электричества)	Кулон	Кл

## Окончание табл. П.18

Сила тока	Ампер	А
Электрическое напряжение	Вольт	В
Емкость	Фарада	Ф
Электрическое сопротивление	Ом	Ом
Поток магнитной индукции	Вебер	Вб
Магнитная индукция	Тесла	Тл
Индуктивность	Генри	Гн
Световой поток	люмен	Лм
Освещенность	люкс	Лк
Активность радиоактивного распада	Беккерель	Бк
Поглощенная доза излучения	Грэй	Гр

Таблица П.19

## Длины волн видимой области спектра

Спектральная область	Длина волны, нм
Красные лучи	760–640
Желтые лучи	640–580
Зеленые лучи	580–495
Голубые лучи	495–440
Фиолетовые лучи	440–400

Учебное издание

Барков Юрий Анатольевич,  
Вотинов Георгий Николаевич,  
Зверев Олег Михайлович,  
Перминов Анатолий Викторович

## **КРАТКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

*Учебное пособие*

Редактор и корректор *Е.В. Копытина*

---

Подписано в печать 18.12.15. Формат 70×100/16.  
Усл. печ. л. 32,9. Тираж 100 экз. Заказ № 254/2015.

---

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета.  
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.  
Тел. (342) 219-80-33.